ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
имени Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 172 (232)

ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 172 (232)

Под редакцией К. П. Широкова

«ЭНЕРГИЯ»
Ленинградское отделение
1975

Выбор методов обработки результатов наблюдений при измерениях часто представляет собой сложную задачу, особенно при метрологических исследованиях высокой точности. В связи с этим ВНИИМ им. Д. И. Менделеева включил в свою тематику разработку нормативных документов с конкретными рекомендациями по методам обработки наблюдений при измерениях.

Уже в 1972 г. опубликован сборник трудов метрологических институтов СССР «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях», в котором помещена работа Ж. Ф. Кудряшовой, С. Г. Рабиновича и К. А. Резника, посвященная методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. Методы, рассмотренные в статье, будут положены в основу государственного стандарта, разработка которого уже ведется.

В настоящем выпуске помещена вторая работа из этой же серии вопросов, содержащая результаты плановой научно-исследовательской работы ВНИИМ, авторами которой являются Ж. Ф. Кудряшова и С. Г. Рабинович. Работа посвящена методам обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях.

Кроме того, в сборник включены две статьи, освещающие частные вопросы, связанные с обработкой результатов наблюдений при косвенных измерениях. В одной из них рассматривается методика расчета доверительной границы суммарной погрешности в случае композиции нескольких равновероятных распределений, имеющих неодинаковую плотность. Вторая статья посвящена вопросу построения доверительных интервалов для произведения случайных величин или их функций.

Следует надеяться, что публикуемые в настоящем сборнике материалы представят интерес для лиц, имеющих дело с косвенными измерениями. Замечания по содержанию сборника просьба направлять по адресу: 198005, Ленинград, Московский пр., д. 19, ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.

М $\dfrac{30306\text{-}116}{051(01)\text{-}75}$

УДК 53.087: 519.2

Ж. Ф. КУДРЯШОВА, С. Г. РАБИНОВИЧ

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — истинное значение измеряемой величины;
b — постоянный коэффициент;
$D[X]$ — дисперсия случайной величины;
k — число степеней свободы;
m — число измеряемых аргументов;
$M[X]$ — математическое ожидание случайной величины;
n — число результатов наблюдений измеряемого аргумента или число отдельных значений измеряемой величины;
q — уровень значимости критерия;
S — оценка среднего квадратического отклонения результата измерения;
t_q — q-я квантиль распределения Стьюдента;
W_q — q-я квантиль распределения Вилкоксона;
X — случайная величина, реализациями которой являются результаты наблюдений при измерениях аргументов;
x_i — результат наблюдения при измерении i-го измеряемого аргумента;
Y — случайная величина, реализациями которой являются отдельные значения косвенно измеряемой величины;
y_i — отдельное (i-е) значение косвенно измеряемой величины;
Z_q — q-процентная квантиль нормального распределения;
Δ — граница погрешности результата измерения (доверительная погрешность результата измерения);
ε — случайная погрешность;
η_i — коэффициент влияния i-й влияющей величины на погрешность результата;
θ — граница неисключенной систематической погрешности (доверительная граница неисключенной систематической погрешности);
ϑ — неисключенная систематическая погрешность;
ρ — коэффициент корреляции;
σ — среднее квадратическое отклонение результата измерения;
χ_q^2 — q-процентная квантиль распределения Пирсона.

Символ со знаком $\sim$ обозначает оценку соответствующего параметра. Например, если $D[X]$ — дисперсия X, то $\tilde{D}[X]$ — оценка дисперсии X.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Термины, используемые в данной работе, предусмотрены ГОСТ 16263-70 «ГСИ. Метрология. Термины и определения». Дополнительно определены следующие понятия.

Измеряемые аргументы (в краткой форме — аргументы) — величины, значения которых получают в результате прямых измерений и используют для нахождения косвенно измеряемой величины.

Отдельное значение измеряемой величины (ОЗИВ) — значение косвенно измеряемой величины, вычисленное по известной функциональной зависимости этой величины от измеряемых аргументов путем подстановки в нее результатов наблюдений, полученных при измерении аргументов.

Метод приведения — метод статистической обработки результатов наблюдений, при котором результат косвенного измерения находят путем обработки группы отдельных значений измеряемой величины, рассматриваемой как группа результатов наблюдений при прямых измерениях.

Метод перебора — метод статистической обработки сгруппированных результатов наблюдений, при котором результат измерения находят по приближенно построенной функции распределения отдельных значений измеряемой величины.

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

В метрологии методом обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях уделяется большое внимание [1—5]. Теоретической основой этих методов является теория вероятностей и математическая статистика. Число публикаций в этой области велико, но наибольшей известностью пользуются монографии [6—12].

Большое количество источников и то, что они часто содержат различные методы решения одних и тех же задач, приводят к тому, что выбор соответствующего метода, как правило, представляет значительные трудности. Кроме того, от метода обработки результатов наблюдений зависит результат измерения и оценка его погрешности. Поэтому для метрологии, где особенно важна согласованность результатов, необходим единый подход к решению названных задач.

На основе косвенных измерений устанавливают, например, значения, приписываемые эталонам единиц производных величин, исходя из значений единиц основных величин, воспроизводимых их первичными эталонами. Поэтому косвенные измерения весьма распространены в практике метрологических институтов. Применяются, однако, и менее точные косвенные измерения. Например, плотность твердых тел при технических измерениях находят по их массе и объему, методов прямого измерения этой величины нет.

При косвенных измерениях искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и измеряемыми аргументами.

Данная работа посвящена точным косвенным измерениям, при которых аргументы измеряются с многократными наблюдениями. Зависимость измеряемой величины A от измеряемых аргументов A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) может быть представлена в виде явной функции

$$A = f(A_1, A_2, \ldots, A_m) \tag{2.1}$$

или в виде неявной функции

$$f(A, A_1, A_2, \ldots, A_m) = 0, \tag{2.2}$$

где A — измеряемая величина;
A_i — i-й измеряемый аргумент;
m — число измеряемых аргументов.

Ввиду того, что в метрологической практике чаще всего встречаются явные зависимости, в данной работе рассматриваются методы обработки экспериментальных данных лишь для явных функций.

Оценки аргументов обычно получают в результате прямых измерений. Однако эти оценки (или часть их) могут быть получены и в результате косвенных, совокупных или совместных измерений. Предполагается, что между измеряемыми аргументами нет стохастической связи. Критерий ее отсутствия приведен в п. 9.2.

По виду функциональной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами косвенные измерения можно разделить на два вида:

1. Косвенные измерения при линейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами (в краткой форме — косвенные измерения при линейной зависимости).

2. Косвенные измерения при нелинейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами (в краткой форме — косвенные измерения при нелинейной зависимости).

Математический аппарат статистической обработки результатов наблюдений детально разработан для первого вида косвенных измерений. Для второго вида косвенных измерений не всегда представляется возможным аналитически точно найти распределение погрешностей результата измерения, если даже известны распределения погрешностей измерений аргументов. К тому же, точность, с которой известны эти распределения, бывает, как правило, невысокой. Однако в большинстве случаев решение задач второго вида можно получить с помощью одного из следующих методов обработки результатов наблюдений: 1) метода линеаризации; 2) метода приведения; 3) метода перебора.

Общие сведения и математические соотношения для этих методов приведены в п. 3.2. Возможность применения метода линеаризации определяется математическим анализом, приведенным в п. 3.2. Применение же метода перебора или приведения зависит от свойств как косвенно измеряемой величины, так и измеряемых аргументов. По свойствам этих величин будем различать два типа косвенных измерений.

Косвенные измерения *первого типа* — измерения, при которых измеряемые аргументы остаются постоянными, а различие между результатами наблюдений вызываются лишь погрешностями наблюдений. При этом искомой величиной является функция математических ожиданий измеряемых аргументов

$$A = f(M[X_1], \ldots, M[X_m]),$$

где X_i — случайная величина, реализациями которой являются результаты наблюдений при измерении i-го аргумента; $M[X_i]$ — математическое ожидание случайной величины X_i.

Примером может служить измерение плотности твердого тела, если масса и объем его могут считаться неизменными.

При косвенных измерениях первого типа для обработки результатов наблюдений можно пользоваться методом перебора. Вообще же этим методом можно пользоваться в случаях, когда результаты наблюдений при измерениях аргументов физически могут комбинироваться между собой в любых сочетаниях.

Косвенные измерения *второго типа* — измерения, при которых измеряемые аргументы взаимосвязаны и изменяются так, что различия между результатами наблюдений вызываются не только погрешностями измерений, но и изменениями измеряемых аргументов. В этом случае искомой величиной является математическое ожидание функции измеряемых аргументов

$$A = M[f(X_1, \ldots, X_m)].$$

При косвенных измерениях второго типа целесообразно пользоваться методом приведения. Но для этого нужно измерения аргументов выполнять так, чтобы результаты наблюдений аргументов были согласованы. Например, измеряется сопротивление резистора методом вольтметра и амперметра и по условиям эксперимента напряжение источника изменяется. Изменение напряжения на резисторе вызывает соответствующее изменение силы тока в его цепи. Согласованность результатов наблюдений напряжения и силы тока означает, что эти наблюдения выполнены одновременно. Нарушение этого условия вызывает специфическую погрешность из-за неодновременности измерений напряжения и силы тока.

Метод наименьших квадратов при косвенных измерениях практически не используется. Частный случай применения этого метода изложен на стр. 17-18.

Здесь рассматриваются методы, при которых измерения аргументов выполняют с многократными наблюдениями с целью повышения точности результата путем уменьшения влияния случайных погрешностей.

Изложим кратко последовательность статистической обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях.

1. В результате измерений отдельных аргументов получают группы результатов наблюдений для каждого аргумента, из которых исключают известные систематические погрешности.

2. Проверяют, соответствует ли распределение каждой группы результатов наблюдений нормальному распределению. В случае соответствия отдельных групп наблюдений нормальному распределению проверяют наличие резко выделяющихся погрешностей в каждой группе. Если они имеются, их исключают.

3. Вычисляют оценки измеряемых аргументов и параметров их точности.*

4. Проверяют отсутствие корреляции между результатами наблюдений каждых двух аргументов по п. 9.1.

5. Вычисляют результат измерения (см. п. 4) и оценки параметра его точности по пп. 5.1; 5.2.

6. Находят доверительную случайную погрешность согласно пп. 5.3; 5.4, неисключенные систематические погрешности по п. 6 и общую погрешность результата измерения (п. 7).

Результат измерения и оценку его погрешности представляют в одном из двух, указанных в п. 8, видов записи результата измерения. Кроме того, в пп. 9.2 и 9.3 предусмотрена проверка гипотезы допустимости расхождения двух результатов измерений одной измеряемой величины.

3. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

3.1. Основные математические соотношения при линейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами

Математическое ожидание и дисперсия результата измерения. Линейная функциональная зависимость является простейшей формой зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами и может быть выражена формулой

$$Y = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i, \tag{3.1}$$

где b_i — постоянный коэффициент i-го аргумента.

Обычно основными параметрами распределения случайной величины X считают $M[X]$ и $D[X]$. Их можно вычислить, пользуясь известными формулами. Согласно свойствам математического ожидания [8],

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot M[X_i], \tag{3.2}$$

где $M[X_i]$ — математическое ожидание i-го аргумента.

* Методика решения этих трех задач изложена в работе [13].

В случае независимости аргументов величина $D[Y]$ равна [6]

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot D[X_i], \tag{3.3}$$

где $D[X_i]$ — дисперсия результатов наблюдений при измерении i-го аргумента.

В случае зависимых аргументов [6]

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot D[X_i] + \sum_{h,i}^{m} b_h b_i \sigma_h \sigma_i \rho_{hi}, \tag{3.4}$$

где σ_i — среднее квадратическое результатов наблюдений при измерении i-го аргумента; ρ_{hi}-коэффициент корреляции между случайными погрешностями измерений h-го и i-го аргументов.

$$\rho_{hi} = \frac{M\,[(X_h - M\,[X_h])\,(X_i - M\,[X_i])]}{\sigma_h \sigma_i}. \tag{3.5}$$

Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины. Построение доверительного интервала для косвенно измеряемой величины затруднительно даже при нормальном распределении погрешностей аргументов. Можно построить доверительный интервал для косвенно измеряемой величины лишь в некоторых рассматриваемых ниже частных случаях.

Если функция (2.1) имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot A_i, \tag{3.6}$$

то построение доверительного интервала для A возможно в трех случаях.

1. Известны веса

$$\lambda_h = \frac{b_h^2 \cdot \frac{\sigma_h^2}{n_h}}{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}},$$

где σ_i^2 — дисперсия наблюдений по i-му аргументу;

n_i — число результатов наблюдений при измерении i-го аргумента.

Веса λ_i могут быть известны по результатам предыдущих аналогичных экспериментов. Тогда распределение дроби

$$t = \frac{\tilde{A} - A}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{\lambda_i n_i \left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - m\right)}}} \tag{3.7}$$

(где $\tilde{A}$ — результат измерения; $\frac{S_i^2}{n_i}$ — оценка дисперсии результата измерения i-го аргумента) соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы (14).

Действительно, распределение случайной величины

$$\frac{\tilde{A}-A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}}}$$

соответствует нормальному распределению $N(0,1)$; распределение случайной величины

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{\sigma_i^2 \left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m\right)}}$$

соответствует распределению $\sqrt{\chi^2}$ с $k = \sum_{j=1}^{m} n_j - m$ степенями свободы, и эти две случайные величины независимы.

Следовательно, доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины будет

$$\left[\tilde{A} - t_q \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{\lambda_i n_i \left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m\right)}},\right.$$

$$\left.\tilde{A} + t_q \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{\lambda_i n_i \left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m\right)}}\right], \tag{3.8}$$

где t_q — q — процентная квантиль распределения Стьюдента.

2. Аргументы измерены с одинаковой точностью, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2$ (что проверяется с помощью критерия Бартлетта [11], а коэффициенты b_i могут быть различными. Тогда распределение дроби

$$t = \frac{(\tilde{A} - A) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2}{n_i}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2 (n_i - 1)}} \tag{3.9}$$

соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы, так как случайная величина

$$\frac{\tilde{A} - A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}}} \in N(0, 1).$$

а распределение случайной величины

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{\sigma^2}}$$

соответствует распределению $\sqrt{\chi^2}$ с $k = \sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы, и эти две случайные величины независимы. Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины будет

$$\left[\bar{A} - t_q \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i}}, \right.$$

$$\left. \bar{A} + t_q \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i}} \right]. \qquad (3.10)$$

Доверительная вероятность $\alpha = 1 - q$.

3. Аргументы измерены так, что $b_1^2\sigma_1^2 \approx b_2^2\sigma_2^2 \approx \ldots \approx b_m^2\sigma_m^2$ (что проверяется с помощью критерия Бартлетта [11]). Тогда распределение дроби

$$t = \frac{(\bar{A} - A) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i}}}$$

соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы, так как случайная величина

$$\frac{\bar{A} - A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} m b_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}}} \in N(0, 1),$$

а распределение случайной величины

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{b_i^2 \sigma_i^2}}$$

соответствует распределению $\sqrt{\chi^2}$ с $k = \sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы, и эти две случайные величины независимы.

Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины будет

$$\left[\bar{A}-\frac{t_q}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}}\cdot\sqrt{m\cdot\sum_{i=1}^{m} b_i^2\,\frac{S_i^2\,(n_i-1)}{n_i}}\,,\right.$$

$$\left.\bar{A}+\frac{t_q}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}}\sqrt{m\cdot\sum_{i=1}^{m} b_i^2\cdot\frac{S_i^2\,(n_i-1)}{n_i}}\right],$$

доверительная вероятность $\alpha = 1-q$.

В более общем случае, когда о σ_i^2 ничего неизвестно, кроме оценок S_i^2 точно построить доверительный интервал для измеряемой величины A не представляется возможным. Однако для двух рассматриваемых ниже случаев возможно приближенное построение доверительного интервала.

Основываясь на идее А. Вальда и результатах работы [14], В. И. Пагурова [15] рассмотрела распределение дроби

$$v=\frac{d-\delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\,,$$

где $d=\bar{A}_1-\bar{A}_2$, $\delta = A_1 - A_2$ как функции мешающего параметра $c' = \dfrac{\frac{\sigma_1^2}{n_1}}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ и построила критическое значение статистики v в виде полинома $f(c)$, где $c=\dfrac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ — оценка мешающего параметра c'.

$$f(c)=f(\eta,\ k_1,\ k_2,\ \alpha)=t_2\cdot\frac{(\theta-\eta)^2\cdot(1-\eta)}{\theta^2}+$$

$$+\,t\cdot\frac{\theta\,(1-\theta)+(2\theta-1)\,(\eta-\theta)}{\theta^2\,(1-\theta)^2}\,\eta\,(1-\eta)+t_1\cdot\frac{(\theta-\eta)^2\,\eta}{(1-\theta)^2}\,,$$

где

$$\eta=c-2c\,(1-c)\left(\frac{1-c}{k_2}-\frac{c}{k_1}\right),\quad \theta=\frac{k_1}{k_1+k_2},\quad k_1=n_1-1,\ \ k_2=n_2-1,$$

t, t_1, t_2 — $q/2$ — процентные точки распределения Стьюдента с n_1+n_2-2, n_1-1, n_2-1 степенями свободы соответственно.

Для наиболее часто применяемых уровней значимости В. И. Пагурова построила критические значения критерия v как функции c, n_1 и n_2 (см. табл. 1 приложения).

Применяя результаты работы В. И. Пагуровой [15], можно построить приближенный доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины A, являющейся линейной функцией двух аргументов

$$A = b_1 A_1 + b_2 A_2.$$

Квантили v_q, рассчитанные Пагуровой, представлены в таблице 1 в зависимости от

$$c = \frac{b_1^2 \cdot \frac{S_1^2}{n_1}}{b_1^2 \cdot \frac{S_1^2}{n_1} + b_2^2 \cdot \frac{S_2^2}{n_2}}$$

и числа степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, где n_i — число результатов наблюдений при измерении i-го аргумента. Тогда доверительный интервал для A будет

$$\left[\bar{A} - v_q \cdot \sqrt{S^2}, \quad \bar{A} + v_q \cdot \sqrt{S^2}\right],$$

где

$S^2 = b_1^2 \cdot \frac{S_1^2}{n_1} + b_2^2 \cdot \frac{S_2^2}{n_2}$ — оценка дисперсии результата измерения. Доверительная вероятность $\alpha = 1 - q$.

Используя результаты работы Б. Л. Уэлча [16], можно построить приближенный доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины A, представленной в виде

$$A = \sum_{i=1}^{m} b_i A_i,$$

когда о σ_i^2 ничего неизвестно, кроме их оценок S_i^2.

Уэлч рассмотрел статистику

$$t = \frac{\bar{A} - A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2}{n_i}}},$$

которая лишь приближенно распределена по Стьюденту, так как распределение статистики

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

отлично от распределения χ^2. Распределение случайной величины η Уэлч аппроксимирует распределением Пирсона III типа и приравнивает первые два момента ее первым двум моментам, соответственно, распределения χ^2 Пирсона. Из полученных уравнений Уэлч находит эффективное число степеней свободы, использование которого дает возможность считать, что статистика t имеет приближенное распределение Стьюдента.

Аналогичным образом можно найти эффективное число степеней свободы для распределения статистики

$$t_q = \frac{\bar{A} - A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}}.$$

Оно равно

$$k_{эфф_1} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2}{n_i}\right)^2 - 2\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S_i^4}{n_i^2 (k_i + 2)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S_i^4}{n_i^2 (k_i + 2)}}, \qquad (3.12)$$

где $k_i = n_i - 1$.

Если $k_{эфф}$ получается дробным, следует его округлить до целого числа.

Доверительный интервал

$$\left[\tilde{A} - t_q \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}, \quad \tilde{A} + t_q \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}\right] \qquad (3.13)$$

накрывает истинное значение измеряемой величины A с вероятностью $\alpha = 1 - q$, где $t_q - q$ — процентная квантиль распределения Стьюдента, соответствующая $k_{эфф}$ степеням свободы.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения результата измерения. При измерениях иногда необходимо знать доверительный интервал для среднего квадратического отклонения (СКО) результата измерения. Аналогично изложенному выше, построение такого доверительного интервала весьма затруднительно.

Если функция (2.1) имеет вид:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i,$$

то построение доверительного интервала для СКО результата измерения возможно в трех случаях.

1. Если измерения аргументов выполнены так, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2$, о доверительный интервал для СКО результата измерения, соответствующий вероятности $\alpha = 1 - q$, будет

$$\left[\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i}}{\chi^2_{q/2}}}; \quad \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{S_i^2 (n_i - 1)}{n_i}}{\chi^2_{1-q/2}}}\right], \qquad (3.14)$$

где n_i — число результатов наблюдений i-го измеряемого аргумента; b_i — постоянный коэффициент i-го измеряемого аргумента; $S_i/\sqrt{n_i}$ — оценка СКО результата измерения i-го аргумента; σ — СКО результата измерения; $\chi^2_{q/2}$, $\chi^2_{1-q/2}$ — нижняя и верхняя квантиль χ^2 распределения Пирсона; m — число измеряемых аргументов.

2. Если измерения выполнены таким образом, что $b_1^2\sigma_1^2 \approx b_2^2\sigma_2^2 \approx \ldots \approx b_m^2\sigma_m^2$, то распределение случайной величины

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{b_i^2 \sigma_i^2}$$

соответствует распределению χ^2 с $k=\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы. Следовательно, доверительный интервал для СКО результата измерения будет

$$\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \frac{S_i^2(n_i-1)}{n_i}}{\chi^2_{q/2}}};\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\cdot\frac{S_i^2(n_i-1)}{n_i}}{\chi^2_{1-q/2}}}\right]. \qquad (3.15)$$

3. Если известны веса измерений, т. е. из аналогичных предыдущих экспериментов известны отношения

$$\lambda_i=\frac{b_i^2\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}}{\sum_{j=1}^{m} b_j^2\cdot\frac{\sigma_j^2}{n_j}},$$

то случайная величина

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i^2 S_i^2\cdot\frac{n_i-1}{n_i}}{\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{m} b_j^2\cdot\frac{\sigma_j^2}{n_j}}$$

имеет χ^2 распределение с $k=\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ степенями свободы. Доверительный интервал для СКО результата измерения будет

$$\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i^2\cdot\frac{S_i^2(n_i-1)}{n_i}}{\lambda_i\chi^2_{q/2}}};\ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i^2\cdot\frac{S_i^2(n_i-1)}{n_i}}{\lambda_i\chi^2_{1-q/2}}}\right], \qquad (3.16)$$

где $\chi^2_{q/2}$ и $\chi^2_{1-q/2}$ — нижняя и верхняя q-процентная квантиль χ^2 распределения.

3.2. Основные математические соотношения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

Метод линеаризации. Для нахождения оценки измеряемой величины и параметров ее точности в косвенных измерениях первого типа используют разложение нелинейной функции в ряд Тейлора

$$A=f(A_1,\ \ldots,\ A_m)=f(\bar{A}_1,\ \ldots,\ \bar{A}_m)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{A}_1,\ \ldots,\ \bar{A}_m)\times$$

$$\times\,\Delta X_i+R_1, \qquad (3.17)$$

где $\bar{A}_i$ — оценка i-го измеряемого аргумента;

$\eta_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — коэффициент влияния, вычисляемый в точке $\bar{A}_1,\ \ldots,\ \bar{A}_m$;

R_1 — остаточный член ряда.

Функция $f(A_1, \ldots, A_m)$ разложена в ряд Тейлора в точке $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$, знак минус перед членом $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) \cdot \Delta X_i$ объясняется тем, что $\Delta X_i = A_i - \tilde{A}_i$, а по правилу разложения в ряд Тейлора должны быть $\Delta X_i = \tilde{A}_i - A_i$.

Предполагается, что результаты измерений аргументов не имеют смещений, поэтому $M\left[\sum\limits_{i=1}^{m} \Delta X_i\right] = 0$. Однако $M\left[\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{A}_1 \ldots, \tilde{A}_m) \cdot \Delta X_i\right] \neq 0$, так как коэффициенты влияния $\eta_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, рассчитанные в точке $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$, являются случайными величинами. Чтобы найти математическое ожидание от левой и правой частей равенства (3.17), необходимо производные в случайной точке $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$ выразить через производные в неслучайной точке $A_1, \ldots, A_m$. Для этого естественно равенство (3.18) записать наоборот, заменив разложение функции $f(A_1, \ldots, \tilde{A}_m)$ в точке $A_1, \ldots, \tilde{A}_m$ разложением функции $f(A_1, \ldots, A_m)$ в точке $A_1, \ldots, \tilde{A}_m$. Тогда

$$f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) = f(A_1, \ldots, A_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A_1, \ldots, A_m) \times \times \Delta X_i + R_1^{'}. \quad (3.18)$$

В равенстве (3.18) производные вычисляются в точке $A_1, \ldots, A_m$, поэтому математическое ожидание от левой и правой частей равенства (3.18) соответственно равно

$$M\left[f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m)\right] = A + M\left[R_1^{'}\right],$$

так как $M\left[\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A_1, \ldots, A_m) \cdot \Delta X_i\right] = 0$ и результаты измерений аргументов независимы.

Линеаризация оправдана, когда можно пренебречь остаточным членом R_1^{1} и считать

$$A = M[f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m)]. \quad (3.19)$$

Дисперсия разности

$$f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) - A \quad (3.20)$$

в случае независимости аргументов и при пренебрежении $D\left[R_1^{'}\right]$ равна

$$D\left[f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) - A\right] = \sum_{i=1}^{m} \eta_i^2 \cdot D\left[\Delta X_i\right]. \quad (3.21)$$

Условием допустимости линеаризации является малость остаточного члена R_1. Остаточный член R_1 равен

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \Delta X_i\right)^2 f(X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_m + \Delta X_m). \quad (3.22)$$

Отклонения ΔX_i при этом должны быть взяты из возможных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали функцию $f(X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_m + \Delta X_m)$. Из формулы (3.18) видно, что пренебрежение остаточным членом вызывает систематическую погрешность результата измерения. Если в оценке погрешности результата измерения принять допустимой погрешность до 20—25%, то, согласно [17], условие допустимости пренебрежения остаточным членом будет

$$R_1 \leqslant 0{,}8 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\eta_i)^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}, \qquad (3.23)$$

где S_i^2 — оценка $D\left[\Delta X_i\right]$.

При наличии других неисключенных систематических погрешностей погрешность из-за пренебрежения остаточным членом будет меньше.

При невыполнении неравенства (3.23) линеаризация недопустима. В тех случаях, когда формулировка задачи измерения позволяет считать измеряемой величиной функцию математических ожиданий результатов измерений аргументов, проверка допустимости линеаризации может не производиться. Например, плотность твердого тела определяется как отношение результата измерения массы M к результату измерения его объема V, что эквивалентно априори принятой линеаризации в соответствии с формулой

$$\rho = \frac{M}{V} + \frac{\partial\rho}{\partial M} \cdot \Delta M - \frac{\partial\rho}{\partial V} \cdot \Delta V.$$

Однако при необходимости полученные результаты можно уточнить, используя члены ряда Тейлора более высоких порядков. Сохраняя в разложении члены второго порядка, имеем

$$f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) = f(A_1, \ldots, A_m) + \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot \Delta X_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (\Delta x_i)^2 + \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta X_i \Delta X_j + R_2, \qquad (3.24)$$

где R_2 — остаточный член ряда Тейлора;

$$R_2 = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta X_i \right)^3 f(X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_m + \Delta X_m).$$

В случае, если корреляция между аргументами отсутствует и результаты наблюдений при измерении аргументов распределены нормально, математическое ожидание и дисперсия левой и правой частей равенства (3.24) будут

$$M[f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m)] = f(A_1, \ldots, A_m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} D[\Delta X_i], \qquad (3.25)$$

$$D[f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) - A] = \sum_{i=1}^{m} (\eta_i)^2 \cdot D[\Delta X_i] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 \cdot D^2[\Delta X_i] + \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 \cdot D[\Delta X_i] \cdot D[\Delta X_j]. \qquad (3.26)$$

Допустимость пренебрежения остаточным членом R_2 определяется неравенством

$$R_2 \leqslant 0{,}8 \sqrt{D\,[f(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m) - A]}. \quad (3.27)$$

Метод приведения. Метод приведения требует выполнения эксперимента таким образом, чтобы получить согласованные результаты наблюдений. Согласованность наблюдений означает либо одновременное их осуществление, либо то, что они выполнены над одним и тем же объектом с одной и той же пробой. При этом получаемые сочетания результатов наблюдений можно подставлять в формулу (2.1) и всякий раз вычислять отдельное значение измеряемой величины (ОЗИВ).

Полученный таким образом статистический ряд ОЗИВ можно рассматривать как группу результатов наблюдений при прямых измерениях и обрабатывать их по методике, изложенной в [13].

Подобный метод целесообразно применить, например, при измерении средней плотности жидкости. В этом случае каждая проба даст пару аргументов M_i и V_i, по которым вычисляется отдельное значение плотности ρ_i. Все полученные значения ρ_i образуют группу, которую можно обрабатывать методами, разработанными для прямых измерений.

Метод перебора. Метод перебора — численный метод построения функции распределения отдельных значений измеряемой величины. Применительно к линейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов этот метод изложен в работе [18]. Ниже он распространен на случай нелинейной зависимости. Метод перебора можно использовать при условии, если выполняемое измерение позволяет производить группировку результатов наблюдений аргументов и подставлять в формулу (1) всевозможные сочетания значений аргументов, соответствующих серединам интервалов их группировки.

Этот статистический метод обработки результатов наблюдений не зависит от вида распределения погрешностей наблюдений.

Для иллюстрации метода перебора рассмотрим случай, когда измеряемая величина Y есть функция трех аргументов

$$Y = f(X_1, X_2, X_3). \quad (3.28)$$

Положим, что число результатов наблюдений каждого из аргументов X_1, X_2, X_3 более 30. Это дает возможность представить результаты наблюдений в виде гистограмм. Гистограммы позволяют приближенно построить функцию распределения отдельных значений измеряемой величины. Построение ведется следующим образом.

Значение измеряемого аргумента на каждом интервале принимаем равным середине этого интервала, а за вероятность этого значения примем частость попадания наблюдений в этот интервал. Частость j-го интервала i-й гистограммы есть m_{ij}/n_i, где m_{ij} — количество наблюдений, попавших в j-й интервал, n_i — общее количество наблюдений.

Подставляя в формулу $Y = f(X_1, X_2, X_3)$ всевозможные сочетания значений X_1, X_2, X_3, равные серединам интервалов соответствующих гистограмм, получаем всякий раз отдельное значение измеряемой величины. Параллельно с вычислением каждого из отдельных значений измеряемой величины рассчитываем вероятность ее появления. Например, значение измеряемой величины $y_1 = f(x_{11}, x_{21}, x_{31})$ встретится с вероятностью $p_1 = \frac{m_{11}}{n_1} \cdot \frac{m_{21}}{n_2} \cdot \frac{m_{31}}{n_3}$, значение измеряемой величины $y_2 = f(x_{11}, x_{21}, x_{32})$ встретится с вероятностью $P_2 = \frac{m_{11}}{n_1} \cdot \frac{m_{21}}{n_2} \cdot \frac{m_{32}}{n_3}$ и т. д. Таким образом, получают статистический ряд отдельных значений измеряемой величины и соответствующие им вероятности. В результате строят функцию распределения отдельных значений измеряемой величины, что дает возможность получить результат измерения и оценку его погрешности.

В работе [19] получена оценка погрешности Δ_K, обусловленной приближенностью метода построения функции распределения и ограниченностью количества экспериментальных данных:

$$\Delta_k < \sum_{i=1}^{m}\left[h_i^2 \cdot \max f_i''(X) + \frac{z_q}{2\sqrt{n_i}}\right], \tag{3.29}$$

где h_i — длина интервала гистограммы распределения результатов наблюдений при измерении i-го аргумента; $f_i''(X)$ — производная плотности распределения результатов наблюдений при измерении i-го аргумента; z_q—q — процентная квантиль нормального распределения; n_i — количество результатов наблюдений при измерении i-го аргумента.

Если функциональную зависимость измеряемой величины от измеряемых аргументов можно представить в виде произведения функций отдельных аргументов, т. е.

$$Y = f(X_1 \cdot \ldots \cdot X_m) = f_1(X_1), \ldots, f_m(X_m),$$

то статистическая обработка результатов наблюдений методом перебора упрощается.

Математическое ожидание и дисперсия величины Y соответственно будут равны

$$M[Y] = M[f_1(X_1)] \ldots M[f_m(X_m)], \tag{3.30}$$

$$D[Y] = \prod_{i=1}^{m} M_2[f_i(X_i)] - \prod_{i=1}^{m} \{M[f_i(X_i)]\}^2, \tag{3.31}$$

где $M_2[f_i(X_i)]$ — второй момент случайной величины $f_i(X_i)$. Математическое ожидание и второй момент случайной величины находят соответственно по формулам:

$$M[f(X)] = \int_a^b f(X)\,p(x)\,dx, \tag{3.32}$$

$$M_2[f(X)] = \int_a^b f^2(X)\,p(x)\,dx. \tag{3.33}$$

Метод наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов, используемый при нахождении оценки измеряемой величины и параметров ее точности, не является основным для косвенных измерений. Однако в некоторых случаях при функциональной зависимости вида $A = A_1/A_2$ использование его дает возможность получить несмещенную, состоятельную и эффективную оценку измеряемой величины. Применение метода наименьших квадратов в подобной ситуации возможно, если результаты измерения аргумента не имеют случайных погрешностей или если

$$\left(\frac{1}{A_2}\right)^2 \cdot S_1^2 \gg \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \cdot S_2^2,$$

т. е. случайными погрешностями измерения аргумента A_2 можно пренебречь по сравнению со случайными погрешностями измерения аргумента A_1. Тогда оценку измеряемой величины $\tilde{A}$ находят из условия

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \tilde{A} \cdot x_{2i})^2 = \min,$$

где n —число результатов наблюдений аргументов; x_{1i}— результат i-го измерения аргумента A_1; x_{2i} — результат i-го наблюдения аргумента A_2.

Условия минимума Q найдем, приравняв нулю производную:

$$-2\tilde{A}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i}\cdot\tilde{A})\cdot x_{2i}=0,$$

отсюда

$$\tilde{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\cdot x_{2i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2}. \tag{3.34}$$

В обозначениях Гаусса это выражение записывается более кратко

$$\tilde{A}=\frac{[x_1\cdot x_2]}{[x_2^2]}.$$

СКО оценки измеряемой величины равно

$$\sigma=\sqrt{\frac{D[X_1]\cdot\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{D[X_1]}{\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2}}.$$

Однако дисперсия погрешности измерения аргумента A_1 часто неизвестна, а в результате статистической обработки результатов наблюдений при измерении аргументов A_1 можно вычислить ее оценку S_1^2. Тогда оценка СКО измеряемой равна

$$S=\sqrt{\frac{S_1^2}{\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2}}. \tag{3.35}$$

4. РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ

4. 1. Результат измерения при линейной зависимости измеряемой величины от аргументов

При линейной зависимости измеряемой величины от аргументов, согласно свойствам математического ожидания (3.2), результат измерения вычисляют по формуле

$$\tilde{A}=\sum_{i=1}^{m}b_i\tilde{A}_i, \tag{4.1}$$

где b_i — i-й постоянный коэффициент; $\tilde{A}_i$ — оценка i-го измеряемого аргумента.

Оценки измеряемых аргументов обычно получают в результате прямых измерений, и в качестве $\tilde{A}_i$ чаще всего принимают среднее арифметическое результатов наблюдений. Как известно, среднее арифметическое является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой измеряемой величины при нормальном распределении результатов наблюдений; при других распределениях для этой цели принимаются другие известные эффективные оценки [6]. Однако, как отмечено в [13], в большинстве случаев распределения результатов прямых наблюдений удовлетворительно аппроксимируется нормальным распределением.

Следовательно, оценка $\tilde{A}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной, согласно вышеизложенному.

4.2. Результат измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

При линеаризации нелинейной функции в качестве оценки измеряемой величины, учитывая (3.17), принимают

$$\tilde{A} = f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m). \tag{4.2}$$

Оценка $\tilde{A}$ является смещенной, так как при ее нахождении не учитываются члены ряда Тейлора высшего порядка. Однако при выполнении неравенства (3.23) смещение незначительно по сравнению с погрешностью результата измерения.

В некоторых случаях, когда неравенство (3.23) не выполняется, оценку измеряемой величины, полученную по формуле (4.2), можно исправить путем учета третьего члена ряда Тейлора. Вычисление для этого производится по формуле согласно (3.25):

$$\tilde{A} = f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} S_i^2. \tag{4.3}$$

О достаточности трех членов ряда Тейлора свидетельствует выполнение неравенства (3.20).

При использовании метода перебора результат измерения вычисляют по формуле

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} P_i y_i \quad \text{или} \quad \tilde{A} = \prod_{i=1}^{m} [f_i(\tilde{X}_i)], \tag{4.4}$$

где N — число ОЗИВ; P_i — вероятность появления i-го ОЗИВ; y_i — i-е ОЗИВ; $[f_i(X_i)]$ — оценка функции i-го измеряемого аргумента.

Значение $[f_i(X_i)]$ находят по формуле (3.32) или методом приведения (см. стр. 16).

5. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Распределение случайных погрешностей результатов наблюдений при измерении аргументов в основном соответствует нормальному.

В качестве параметров случайной погрешности измерения аргумента приняты дисперсия σ^2 или СКО (σ). Ограниченное число наблюдений позволяет получить лишь оценки параметров — S^2 и S, по которым нужно рассчитать оценки параметров случайных погрешностей результата измерения. Расчет их зависит от методики статистической обработки результатов наблюдений.

Кроме параметров случайных погрешностей часто представляет интерес доверительная случайная погрешность. Ее вычисление основано на построении доверительных интервалов для истинного значения измеряемой величины и изложено в пп. 5.3, 5.4.

В особо ответственных случаях в качестве оценки σ целесообразно принимать верхнюю границу доверительного интервала для σ (см. стр. 12-13).

5.1. Оценки параметров случайной погрешности результата измерения при линейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

При линейной функциональной зависимости (2.1) с учетом формулы (3.3), в случае отсутствия зависимости между аргументами, оценку S случайной погрешности результата вычисляют по формуле

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}, \tag{5.1}$$

где b_i — i-й постоянный коэффициент; $\frac{S_i^2}{n_i}$ — оценка дисперсии измерения i-го аргумента. При наличии стохастической зависимости между аргументами для нахождения оценок параметров случайной погрешности необходимо знать коэффициент корреляции между аргументами. Экспериментально его можно определить методами, изложенными в [13]. Рассмотрим простейший случай, когда измеряемая величина A определяется суммой двух аргументов A_1 и A_2

$$A = b_1 A_1 + b_2 A_2.$$

Оценку дисперсии результата в этом случае согласно (3.26) вычисляют по формуле

$$S^2 = b_1^2 \cdot \frac{S_1^2}{n_1} + b_2^2 \cdot \frac{S_2^2}{n_2} + 2\rho b_1 b_2 \frac{S_1}{\sqrt{n_1}} \cdot \frac{S_2}{\sqrt{n_2}}, \tag{5.2}$$

где ρ — коэффициент корреляции.

Если $A = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i A_i$, то S^2 вычисляют по формуле

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i} + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} b_i b_j \frac{S_i}{\sqrt{n_i}} \cdot \frac{S_j}{\sqrt{n_j}}, \tag{5.3}$$

где ρ_{ij} — коэффициент корреляции между случайными погрешностями измерений i-го и j-го аргументов.

5.2. Оценки параметров случайной погрешности результата измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

Используя метод линеаризации при обработке результатов наблюдений оценки параметров случайной погрешности в случае отсутствия корреляции между погрешностями аргументов, S^2 и S вычисляют с учетом (3.21) по формулам

$$\left.\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^{m} \eta_i^2 \cdot S^2(\bar{A}_i), \\ S &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2 \cdot S^2(\bar{A}_i)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где S^2 — оценка дисперсии результата измерения; η_i — коэффициент влияния i-го аргумента на результат измерения.

При наличии корреляционной зависимости между погрешностями аргументов S^2 и S вычисляют по формуле

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}\eta_i^2\cdot S^2(\tilde{A}_i)+2\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{m}\sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}\eta_i\eta_j S(\tilde{A}_i)\,S(\tilde{A}_j).$$

Если неравенство (3.23) не выполняется и при разложении функций в ряд Тейлора используются члены второго порядка, оценки параметра случайной погрешности вычисляют с учетом (3.26) по формуле

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}\eta_i^2S^2(\tilde{A}_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2\cdot[S^2(\tilde{A}_i)]^2+ \\ +\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 S^2(\tilde{A}_i)\,S^2(\tilde{A}_j). \qquad (5.5)$$

Используя метод приведения при обработке результатов наблюдений, оценки параметров случайной погрешности результата измерения S^2 и S вычисляют соответственно по формулам:

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{N(N-1)},\quad S=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{N(N-1)}}, \qquad (5.6)$$

где y_i — ОЗИВ; $\bar{y}$ — среднее арифметическое ряда ОЗИВ; N — число ОЗИВ.

При обработке результатов наблюдений с помощью метода перебора, в случае представления функциональной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов в виде произведения функций отдельных аргументов, параметр случайной погрешности вычисляется, согласно (3.31), по формуле

$$S^2=\bar{A}^2\cdot\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^2}{\bar{A}_i^2}+\sum_{\substack{i\\ i\neq j}}\sum_{j}\frac{S_i^2S_j^2}{\bar{A}_i^2\bar{A}_j^2}+\right. \\ \left.+\sum_{\substack{i\\ i\neq j\neq h}}\sum_{j}\sum_{h}\frac{S_i^2}{\bar{A}_i^2}\cdot\frac{S_j^2}{\bar{A}_j^2}\cdot\frac{S_h^2}{\bar{A}_h^2}+\ldots+\prod_{i=1}^{m}\frac{S_i^2}{\bar{A}_i^2}\right\}. \qquad (5.7)$$

Если в равенстве (5.7) сумма членов, содержащая произведения оценок дисперсий функций отдельных аргументов, на порядок меньше оставшихся членов, то первыми можно пренебречь. Тогда оценка параметра случайной погрешности вычисляется по упрощенной формуле

$$S^2=\bar{A}^2\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^2}{\bar{A}_i^2}. \qquad (5.8)$$

5.3. Вычисление доверительной случайной погрешности результата измерения при линейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

Вычисление доверительной случайной погрешности результата измерения ε_0 возможно лишь в некоторых случаях и при условии, что распределение погрешностей измерений аргументов соответствует нормальному. Методы проверки последнего приведены в [13]. Вычисление доверительной случайной погрешности производится следующим образом.

1. Если функция (2.1) имеет вид

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2,$$

то, согласно (3.11),

$$\varepsilon_0(\alpha) = v_q \cdot S, \tag{5.9}$$

где v_q — q-процентная квантиль распределения, приведенная в табл. 1 для $c = b_1^2 S_1^2(\bar{A}_1) / \left[b_1^2 S_1^2(\bar{A}_1) + b_2^2 S_2^2(\bar{A}_2)\right]$, где $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, n_i — число наблюдений i-го аргумента ($i = 1, 2$).

2. Если функция имеет вид

$$Y = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i,$$

то нахождение доверительной случайной погрешности возможно в следующих случаях:

а) известны веса

$$\lambda_h = \frac{b_h^2 \sigma_h^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2 \sigma_i^2};$$

тогда, согласно (3.8), доверительная случайная погрешность

$$\varepsilon_0(\alpha) = t_q \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{\lambda_i n_i \sum\limits_{j=1}^{m} n_j - m}}, \tag{5.10}$$

где t_q — q — процентная квантиль распределения Стьюдента с $k = \sum\limits_{j=1}^{m} n_j - m$ степенями свободы; b_i — постоянный коэффициент i-го измеряемого аргумента; n_i — число наблюдений i-го аргумента; S_i^2/n_i — оценка дисперсии результата измерения i-го аргумента; m — число измеряемых аргументов;

б) аргументы измерены с одинаковой точностью, т. е. $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_m^2$, тогда

$$\varepsilon_0(\alpha) = t_q \cdot \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^2}{n_i}} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} S_i^2 (n_i - 1)}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} n_j - m}}; \tag{5.11}$$

в) аргументы измерены так, что $b_1^2\sigma_1^2 \approx \ldots \approx b_m^2\sigma_m^2$, тогда

$$\varepsilon_0(\alpha) = t_q \cdot \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2 S_i^2 \cdot \frac{n_i - 1}{n_i}}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - m}}; \tag{5.12}$$

г) Если функция имеет вид $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i X_i$ и о σ_i^2 ничего неизвестно, кроме их оценок S_i^2, то согласно (3.14)

$$\varepsilon_0(\alpha) = t_q \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}}, \tag{5.13}$$

где m — число измеряемых аргументов; t_q—q-процентная квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы

$$k_{\text{эфф}} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 S_i^2}{n_i}\right)^2 - 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S_i^4}{n_i (f_i + 2)}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S_i^4}{n_i^2 (f_i + 2)}}.$$

5.4. Вычисление доверительной случайной погрешности результата измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов

Для построения доверительных интервалов необходимо знать функцию распределения погрешностей результата измерений. Как отмечалось выше, это распределение обычно неизвестно. Поэтому для математически обоснованного решения задачи нужно обратиться к неравенству Чебышева.

В случае применения метода линеаризации, предполагая, что, $M[A] \approx f(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m)$, имеем

$$P[|f(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m) - A| > t \cdot \sigma] < \frac{1}{t^2}. \tag{5.14}$$

Тогда доверительная случайная погрешность результата оценивается по формуле

$$\varepsilon_0(\alpha) = t \cdot S, \tag{5.15}$$

соответствующая доверительная вероятность будет $\alpha = 1 - \frac{1}{t^2}$. При этом параметр σ заменен, как обычно, его оценкой S.

Неравенство Чебышева дает широкие границы для истинного значения измеряемой величины и неточностями из-за сделанных выше допущений ($M[A] \approx f(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m, \sigma \approx S)$ практически можно пренебречь.

Если есть основания распределение погрешностей результата измерений считать одномодальным и симметричным, неравенство (5.14) можно уточнить в соответствии с работой [6], воспользовавшись неравенством

$$P\left[\left|f(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m) - A\right| > t \cdot \sigma\right] < \frac{4}{9t^2}. \quad (5.16)$$

Тогда доверительная случайная погрешность результата оценивается по формуле (5.15), а доверительная вероятность будет

$$\alpha = 1 - \frac{4}{9t^2}.$$

Если число измеряемых аргументов линеаризованной функции более четырех и распределения их погрешностей одномодальны и нет резко выделяющихся, то для нахождения доверительной погрешности результата можно воспользоваться распределением Стьюдента с некоторым «эффективным» числом степеней свободы (см. формулу (3.12)).

$$k_{эфф} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \frac{S_i^2}{n_i}\right]^2 - 2\cdot\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 \cdot \frac{S_i^4}{n_i^2(k_i+2)}\right]}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 \cdot \frac{S_i^4}{n_i^2(k_i+2)}}. \quad (5.17)$$

Тогда

$$\varepsilon_0 = t_q \cdot S,$$

где t_q — квантиль распределения Стьюдента.

При использовании метода приведения доверительная случайная погрешность вычисляется методами, изложенными в [13]. При этом необходимо, чтобы распределение погрешностей результата измерения соответствовало нормальному распределению. В противном случае для оценки доверительной случайной погрешности результата следует воспользоваться неравенством (5.14) или (5.16), а также формулой (5.15).

6. НЕИСКЛЮЧЕННЫЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Систематическая погрешность результата косвенного измерения определяется систематическими погрешностями результатов измерений аргументов.

При точных измерениях стремятся исключить систематические погрешности из результатов измерений аргументов. Это требует глубокого анализа как условий эксперимента, так и всей совокупности результатов наблюдений. Однако полностью исключить систематические погрешности не представляется возможным: после внесения поправок остаются неисключенные остатки систематических погрешностей, которые будем называть неисключенными систематическими погрешностями.

Для неисключенной систематической погрешности обычно находят граничные значения. Эти границы вычисляют так, чтобы возможные различия между результатами наблюдений, выполненных одним и тем же методом, но в разное время и с помощью различных приборов (обеспечивающих предусмотренную методом измерений точность), находились внутри интервала с этими границами. Хотя по своей природе неисключенные систематические погрешности остаются систематическими погрешностями, но в рассматриваемой выше ситуации их можно рассматривать как реализации случайной величины. Принято считать, что эта случайная величина имеет равновероятностное распределение [13, 20].

В пользу приведенных соображений говорит и следующее. Неисключенная систематическая погрешность одного наблюдения имеет какое-то фиксированное значение, находящееся внутри найденных тем или иным путем границ. Отдать предпочтение какому-то из значений нет оснований, так как любое из них возможно. Можно было бы считать эту погрешность во всех случаях равной ее граничному значению, но это ведет к неоправданному преувеличению погрешности результата измерения, особенно, если ее находят путем суммирования составляющих. Другая возможность — считать неисключенную систематическую погрешность (постоянную величину) реализацией случайной величины.

При этом предположение о равновероятности распределения неисключенной систематической погрешности приводит обычно к достаточно осторожным заключениям о погрешностях результатов измерений.

При линейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами неисключенную систематическую погрешность результата измерения можно найти путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов.

Методика нахождения границ неисключенной систематической погрешности результата измерения аргумента изложена в работе [13]. При этом учитывается, что неисключенная систематическая погрешность результата измерения аргумента может состоять из нескольких составляющих. Число этих составляющих определяется числом влияющих величин.

О последних обычно известны только их границы. В некоторых случаях могут быть известны также составляющие неисключенных погрешностей результатов измерения аргументов.

Для того чтобы не делать дополнительных допущений о виде распределений неисключенных систематических погрешностей измерений аргументов целесообразно по возможности использовать исходные данные об их составляющих.

Согласно вышеизложенному, предполагают, что распределение каждой исходной погрешности внутри заданных границ равновероятно. Тогда границу неисключенной систематической погрешности результата измерения θ (без учета знака) вычисляют по формуле

$$\theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2 \cdot \theta_i^2 + \sum_{p=k+1}^{m} b_p^2 \cdot \sum_{j=1}^{r} b_j^2 \theta_{pj}^2} \, . \qquad (6.1)$$

где b_i, b_p — постоянные коэффициенты i-го и p-го аргументов; θ_i — граница неисключенной систематической погрешности результата измерения i-го аргумента, о которой известны только границы; θ_{pj} — граница j-й неисключенной систематической погрешности p-го аргумента; m — общее число аргументов. Значения коэффициента k в зависимости от выбранной доверительной вероятности α, представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

α	0,90	0,95	0,98	0,99
k	0,95	1,1	0,3	1,4

Вычисление коэффициентов для $\alpha = 0{,}90$, 0,95 и 0,99 приведены в работе [21]. Коэффициент для $\alpha = 0{,}98$ находится по той же методике.

Как следует из работы [21], погрешность от применения приведенных в табл. 6.1 усредненных значений коэффициентов не превышает 10%. Однако эти коэффициенты вычислены для одинаковых слагаемых. Неравенство же слагаемых ведет к уменьшению коэффициентов k.* Поэтому та небольшая погрешность, которая возникает от применения коэффициентов k из табл. 6.1, на практике становится еще более незначительной.

---

* См. статью Ж. Ф. Кудряшовой и С. Г. Рабиновича «Вычисление границ композиции равномерных распределений», стр. 58—62 в этом же сборнике.

Если общее число слагаемых в формуле (6.1) невелико (меньше пяти), и они значительно различаются между собой, рекомендуется коэффициент k брать из табл. 6.2. В табл. 6.2 приведены коэффициенты k в зависимости от выбранной доверительной вероятности α, числа слагаемых ($m=2, 3, 4$) и соотношения l между слагаемыми. Под l понимают отношение наибольшей длины интервала одного из слагаемых к длине остальных слагаемых, которые одинаковы.

Таблица 6.2

l	$\alpha=0{,}98$			$\alpha=0{,}99$		
	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
1	1,22	1,28	1,30	1,28	1,38	1,41
2	1,16	1,23	1,26	1,22	1,31	1,36
3	1,11	1,17	1,20	1,16	1,24	1,28
4	1,07	1,12	1,15	1,12	1,18	1,22
5	1,05	1,09	1,12	1,09	1,14	1,18

Встречаются случаи, когда неисключенные систематические погрешности результатов измерений всех аргументов заданы своими границами θ_i, и случаи, когда неисключенные систематические погрешности результатов измерений всех аргументов заданы границами θ_{pj} погрешностей измерений влияющих величин. Естественно, что формула (6.1) в этих случаях упрощается и принимает вид

$$\theta = k\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\theta_i^2} \qquad (6.2)$$

или

$$\theta = k\cdot\sqrt{\sum_{p=1}^{m} b_p^2 \sum_{j=1}^{r} b_j^2\theta_{pj}^2} \qquad (6.3)$$

соответственно.

Если известны границы θ_i неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов, вычисленные по своим составляющим, и соответствующая им доверительная вероятность одна и та же, то граница неисключенной систематической погрешности находится по формуле

$$\theta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\theta_i^2}\,. \qquad (6.4)$$

В том случае, когда доверительные вероятности для погрешностей измерений аргументов неодинаковы, следует привести их к одному значению. На основе приведенных соотношений может быть найдена неисключенная систематическая погрешность результата измерения и в промежуточных случаях.

При нелинейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами для нахождения неисключенной систематической погрешности результата измерения предварительно производят линеаризацию нелинейной зависимости. После этого задача решается методом, изложенным выше для линейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами.

В случае невозможности использования метода линеаризации для нахождения неисключенной систематической погрешности результата измерения можно воспользоваться методом перебора, изложенным на стр. 16.

7. ОБЩАЯ ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

7.1. Случайная и систематическая составляющие погрешности измерения

Общая погрешность результата измерения включает случайную ε и систематическую θ составляющие. Однако в ряде случаев составляющие ε и θ существенно различны и одной из них можно пренебречь. Используя результаты работы [17] и считая, что допустимо оценивать погрешности результата измерения с погрешностью 20—25%, можно получить следующие условия пренебрежения одной из составляющих.

1. Если

$$\frac{\theta}{S} < 0{,}8, \tag{7.1}$$

то неисключенной систематической погрешностью можно пренебречь по сравнению со случайной составляющей. Погрешность результата измерения в этом случае характеризуют только случайной погрешностью, оценки параметров и доверительную границу которой вычисляют согласно п. 5.

2. Если

$$\frac{\theta}{S} > 8, \tag{7.2}$$

то случайными погрешностями можно пренебречь. Погрешность результата определяется лишь неисключенной систематической погрешностью, расчет которой изложен в п. 6.

3. Если неравенства (7.1) и (7.2) не выполняются, то погрешность результата измерения содержит как случайную составляющую, так и неисключенную систематическую погрешность. Расчет доверительных границ общей погрешности результата изложен в п. 7.2.

7.2. Доверительные границы общей погрешности результата измерения

Общая погрешность результата измерения определяется композицией неисключенной систематической и случайной составляющих погрешности. Соответственно, доверительные границы погрешности результата измерения равны

$$\Delta = \pm t_q(\Delta)\cdot S(\Delta), \tag{7.3}$$

где $t_q(\Delta)$ — коэффициент функции распределения композиции случайной и неисключенной систематической составляющих, соответствующий доверительной вероятности α; $S(\Delta)$ — оценка среднего квадратического отклонения общей погрешности результата измерения.

Основные трудности при вычислении Δ связаны с нахождением коэффициента $t_q(\Delta)$. В работе [21] для вычисления $t_q(\Delta)$ предложена эмпирическая формула

$$t_q(\Delta) = \frac{t_q\cdot S + \theta}{S + \dfrac{\theta}{k\sqrt{3}}}, \tag{7.4}$$

где t_q—q — процентная квантиль распределения случайной погрешности результата измерения; θ — граница неисключенной систематической погрешности результата измерения; k — коэффициент, соответствующий доверительной вероятности $\alpha = 1-q$, при расчете границы неисключенной систематической погрешности. Вероятность, соответствующая $t_q(\Delta)$, должна быть той же, что была принята для определения t_q и коэффициента k при расчете θ. Оценка СКО общей погрешности результата измерения вычисляется по формуле

$$S(\Delta) = \sqrt{S^2 + \frac{\theta^2}{3k^2}}. \tag{7.5}$$

Если известно, что неисключенная систематическая погрешность результата измерения θ распределена равновероятно, то в формулах (7.4) и (7.5) коэффициент $k = 1$.

8. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ *

Если предполагается исследование и сопоставление результатов измерений и анализ погрешностей, то указываются отдельно полученная оценка измеряемой величины, граница неисключенной систематической погрешности и оценка СКО случайной погрешности. Доверительную вероятность указывают десятичной дробью после погрешности. Таким образом, результат измерения и его погрешности записывают в виде

$$\tilde{A};\ \theta,\ \alpha;\ S, \tag{8.1}$$

где θ — доверительная граница неисключенной систематической погрешности результата измерения; S — оценка параметра случайной погрешности.

При возможности указывают вид распределения составляющих погрешностей результата измерения.

В тех случаях, когда нужно указать результат измерения и общую погрешность, запись результата представляют в виде

$$\tilde{A} \pm \Delta,\ \alpha, \tag{8.2}$$

где Δ — доверительная граница общей погрешности результата измерения, соответствующая доверительной вероятности α.

Если границы доверительной погрешности не симметричны относительно $\tilde{A}$, то результат измерения представляют следующим образом:

$$\tilde{A};\ \Delta \text{ от } \Delta_н \text{ до } \Delta_в;\ \alpha,$$

где $\Delta_н$, $\Delta_в$ — соответственно нижняя и верхняя границы доверительной погрешности результата измерения.

9. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

При обработке и анализе результатов измерений приходится проверять те или иные гипотезы относительно результата измерения и параметров его точности, наличия корреляционных зависимостей между аргументами. Проверку наличия корреляционных зависимостей между аргументами можно осуществить лишь в случае нормального распределения результатов наблюдений при измерениях аргументов. Методика проверки наличия корреляционной зависимости изложена в п. 9.1.

Проверка допустимости расхождения двух результатов измерений одной и той же измеряемой величины решается путем проверки гипотезы о том, что полученные результаты, являются оценками одного и того же значения

---

* Принятые формы представления результата измерения соответствуют ГОСТ 8.011—72. Однако обозначения некоторых величин и доверительной вероятности применены те же, что и в ранее изданной рекомендации по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях [13], и поэтому отличаются от употребляемых в ГОСТ 8.011—72. Поскольку указанный стандарт не устанавливает обозначений, то это не является его нарушением.

измеряемой величины. Математически строго эту проблему можно решить лишь для функции вида

$$A=\sum_{i=1}^{m} b_i A_i$$

в случае нормального распределения погрешностей измерений аргументов и при условии одинаковой сходимости измерений аргументов, т. е. при $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_m^2$, или проведения измерений так, чтобы $b_1^2\sigma_1^2 \approx b_2^2\sigma_2^2 \approx \ldots \approx b_m^2\sigma_m^2$, или при наличии весов

$$\lambda_h=\left(b_h^2\cdot\frac{\sigma_h^2}{n_h}\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}\right) \text{ (см. п. 9.2).}$$

Если вышеуказанные условия не выполняются, проверка гипотезы о равенстве двух результатов измерений математическими методами пока невозможна. Однако в данной работе (см. п. 3.2) даются приближенные методы нахождения доверительных интервалов для истинного значения измеряемой величины. Знание доверительных интервалов помогает решить задачу. Для этого необходимо сопоставить эти доверительные интервалы: если доверительные интервалы двух результатов измерений пересекаются и их общая часть превышает половину каждого из интервалов — расхождение между результатами измерений допустимо, в противном случае гипотеза о допустимости расхождения двух результатов измерений неверна.

При использовании метода приведения для проверки статистических гипотез применяются методы, принятые для прямых измерений и изложенные в [9, 11, 13]. Если распределение ОЗИВ отклоняется от нормального, то методику проверки гипотез основывают на теории непараметрических статистик. Один из методов проверки допустимости расхождения двух результатов измерений, основанный на критерии Вилкоксона, изложен в п. 9.3.

9.1. Выявление корреляционной связи между аргументами

Методика статистической обработки результатов наблюдений, изложенная выше, верна при отсутствии стохастической зависимости между аргументами. Критерием отсутствия этой связи между двумя аргументами является выполнение неравенства [12]

$$\left|\frac{r\sqrt{n}}{1-r^2}\right| < t_q, \tag{9.1}$$

где t_q — q-процентная квантиль распределения Стьюдента;

$$r=\frac{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_{hi}x_{ji}-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{hi}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ji}\right)\right]}{S_h S_j} \tag{9.2}$$

— коэффициент корреляции между аргументами A_h и A_j; x_{hi}, x_{ji} — результаты наблюдений h-го и соответственно j-го аргумента; S_h, S_j — оценки СКО h-го и j-го аргумента.

Если измеряемая величина зависит от m аргументов, необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между всеми парными сочетаниями аргументов.

9.2. Допустимое расхождение двух результатов измерений одной измеряемой величины

Если измеряемая величина линейно зависит от измеряемых аргументов, погрешности измерений которых распределены нормально, различают три случая, при которых можно проверить допустимость расхождения результатов измерения. Пусть один результат измерения вычислен с помощью функции

$$A_1 = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i,$$

другой результат измерения вычислен с помощью функции

$$A_2 = \sum_{i=m+1}^{m+h} b_i X_i.$$

Аргументы измерены так, что $b_1^2\sigma_1^2 = \ldots = b_m^2\sigma_m^2 = \ldots = b_h^2\sigma_h^2$ (проверяется с помощью критерия Бартлетта [11]). В случае допустимого расхождения двух результатов измерения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ распределение случайной величины

$$t = \frac{(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m+h} n_i - h - m} \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^{h+m} n_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{h+m} b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{h+m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{h+m} n_i}} \qquad (9.3)$$

соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum_{i=1}^{h+m} n_i - h - m$ степенями свободы (см. стр. 9). Выбирают уровень значимости $q = 1 - \alpha$, где α — доверительная вероятность. По таблице распределения Стьюдента находят квантиль t_q, соответствующую уровню значимости q. Если $t < t_q$, то два результата $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ являются оценками одной измеряемой величины A.

2. Аргументы измерены с одинаковой сходимостью, т. е. $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx \approx \ldots \approx \sigma_m^2 \approx \ldots \approx \sigma_h^2$ (проверяется с помощью критерия Бартлетта [11]). Распределение дроби

$$t = \frac{(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m+h} n_i - h - m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{h+m} b_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{h+m} S_i^2 \cdot \frac{n_i - 1}{n_i}}} \qquad (9.4)$$

соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum_{i=1}^{h+m} n_i - m - h$ степенями свободы (см. п. 3.1). Сравнивают вычисленное t и t_q, найденное по таблице распределения Стьюдента. Если $t < t_q$, то два результата измерения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ являются оценками одной измеряемой величины A.

3. Известны веса

$$\lambda_h = \frac{b_h^2 \cdot \frac{\sigma_h^2}{n_h}}{\sum_{i=1}^{h+m} b_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}},$$

В случае допустимого расхождения двух результатов измерения $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ распределение случайной величины

$$t = \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{h+m} \frac{b_i^2 S_i^2 (n_i - 1)}{\lambda_i n_i \left(\sum_{j=1}^{h+m} n_j - m - h \right)}}} \tag{9.5}$$

соответствует распределению Стьюдента с $k = \sum_{i=1}^{h+m} n_i - h - m$ степенями свободы (см. стр. 7). По таблице распределения Стьюдента находим квантиль t_q, соответствующую уровню значимости критерия. Если $t < t_q$, то два результата $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ являются оценками одной измеряемой величины A.

Если два результата измерения одной величины получены по одним и тем же формулам при измерениях одних и тех же аргументов, то для проверки допустимости расхождение двух результатов косвенно измеряемой величины достаточно проверить допустимость расхождения каждого из двух результатов измерений аргументов, согласно работе [13].

9.3. Допустимое расхождение двух результатов измерений одной величины при использовании метода приведения

Сравниваются два результата измерения, каждый из которых имеет по группе отдельных значений. Распределения отдельных значений измеряемой величины отличны от нормального или число этих значений меньше 10, так что нельзя проверить, соответствуют ли их распределения нормальному. Решение находят с помощью критерия Вилкоксона, известного из теории непараметрических статистик [9].

Имеется две группы отдельных значений измеряемой величины $y_1, \ldots, y_g$ и $y'_1, \ldots, y'_h$. Проверим принадлежат ли эти группы к одной и той же совокупности, т. е. являются ли оценки y и y' оценками одной измеряемой величины. Составим из этих двух групп вариационный ряд, т. е. расположим отдельные значения группы y_i и группы y'_i в порядке их возрастания. В результате получим последовательность типа

$$\begin{array}{cccccc} y\ y\ y' \ldots & y' & y & y' \\ 1\ 2\ 3\ \ldots & N-2 & N-1 & N, \end{array}$$

где $N = g + h$ и буквами y и y' обозначены члены вариационного ряда, принадлежащие группам y_i и y'_i соответственно. Снизу указаны порядковые номера членов ряда (ранги r_i).

Вычислим значение случайной величины $W = r_1 + r_2 + \ldots + r_g$, где $r_1, r_2, \ldots, r_g$ — ранги, соответствующие величинам $y_1, y_2, \ldots, y_g$. Если $W < W_q$, то согласно критерию Вилкоксона обе группы y_i и y'_i принадлежат к одной и той же совокупности.

В табл. 2 приложения даны нижние критические значения $W(q, g, h)$ для $g = 1\ (1)\ 25$, $q = 0{,}001$; $0{,}005$; $0{,}010$; $0{,}025$; $0{,}05$; $0{,}10$. Верхние критические значения следует вычислять по формуле

$$W'(q, g, h) = \frac{g(g + h + 1)}{2} - W(q, g, h).$$

Если число наблюдений одной из групп превосходит 25, то распределение случайной величины W соответствует примерно нормальному распределению с параметрами

$$M[W] = \frac{g(g+h+1)}{2}, \quad D[W] = \frac{gh(g+h+1)}{12}. \tag{9.6}$$

Следовательно, если

$$\frac{W - M[W]}{\sqrt{D[W]}} < z_q, \tag{9.7}$$

где z_q — квантиль нормального распределения, то расхождение двух результатов измерений y_i и y_i' имеет случайный характер, т. е. y_i и y_i' — оценки одной измеряемой величины A.

При совпадении результатов отдельных значений измеряемой величины двух групп рекомендуется всем совпавшим результатам приписывать одинаковый ранг, равный арифметическому среднему тех рангов, которые имели бы эти значения до совпадения.

Пример. Требуется проверить, существенно ли расхождение результатов измерений, полученных по двум группам.

I группа: 35,5; 23,4; 45,0; 20,4; 74,4; 46,7 ($g = 6$).

II группа: 46,5; 63,9; 48,6; 43,6; 33,3; 38,7; 49,6; 56,1; 43,7; 51,3; 69,1; 51,8 ($h = 12$).

Для решения этой задачи используем критерий Вилкоксона. Располагаем отдельные значения измеряемой величины I и II групп в вариационный ряд и под каждым значением проставим порядковые номера — ранги:

20,4	23,4	33,3	35,5	38,7	43,6	43,7	45,0	46,5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
46,7	48,6	49,6	51,3	51,8	56,1	63,9	69,1	74,4
10	11	12	13	14	15	16	17	18

Статистика $W = 1 + 2 + 4 + 9 + 11 + 19 = 46$. Выбираем уровень значимости $q = 0,05$ и по табл. 2 приложения находим для $g = 6$ и $h = 12$ $W_{0,05} = 49$. Так как $W < W_q$, то расхождения результатов измерений не существенны.

Примеры статистической обработки результатов наблюдений

Пример 1. Определение общего сопротивления последовательного соединения резисторов по формуле

$$R_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} b_i R_i,$$

где R_i — сопротивление отдельного резистора; b_i — число резисторов в группе; m — число групп резисторов.

Пусть резистор R_Σ образован путем последовательного соединения 12 резисторов трех различных номинальных сопротивлений, причем $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ и $b_3 = 6$. Следовательно, $R_\Sigma = 2R_1 + 4R_2 + 6R_3$.

Номинальные значения сопротивления резисторов и пределы допускаемых отклонений от них (без учета знака) приведены в табл. 10.1. Известно также, что по совокупности резисторов с номинальными значениями сопротивлений распределения действительных значений их сопротивлений удовлетворительно аппроксимируются нормальным распределением и указанные пределы допускаемых отклонений соответствуют уровню вероятности 0,98.

Таблица 10.1

Сопротивление R_i	Номинальное значение сопротивления резистора, Ом	Предел допускаемых отклонений θ_i, Ом
R_1	100,00	0,03
R_2	10,00	0,02
R_3	1,00	0,01

Номинальное сопротивление составного резистора в соответствии с формулой (4.1) равно

$$R_\Sigma = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 246 \text{ Ом}.$$

Оценим возможные отклонения действительного значения сопротивления составного резистора от его номинального значения. Рассматриваемому случаю соответствует формула (6.4)

$$\theta_\Sigma = \sqrt{2^2 \cdot \theta_1^2 + 4^2 \cdot \theta_2^2 + 6^2 \cdot \theta_3^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 4^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 6^2 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 0{,}11 \text{ Ом}.$$

Округляя, получим $\theta_\Sigma = 0{,}1$ Ом. Этому значению доверительной погрешности соответствует вероятность $\alpha = 0{,}98$. Окончательно можно записать

$$R_\Sigma = 246{,}0 \pm 0{,}1 \text{ Ом}, \quad \alpha = 0{,}98.$$

Пример 2. Определение плотности твердого тела по формуле $\rho = \frac{m}{V}$.

При определении плотности твердого тела получены результаты наблюдений, представленные в табл. 10.2*

Таблица 10.2

Масса тела $m_i \cdot 10^3$, кг	$(m_i - \overline{m}) \cdot 10^7$, кг	$(m_i - \overline{m})^2 \cdot 10^{14}$, кг^2	Объем тела $V_i \cdot 10^6$, м^3	$(V_i - \overline{V}) \cdot 10^{10}$, м^3	$(V_i - \overline{V})^2 \cdot 10^{20}$, м^6
252,9119	1	1	195,3799	1	1
252,9133	13	169	195,3830	32	1024
252,9151	31	961	195,3790	8	6
252,9130	10	100	195,3819	21	441
252,9109	11	121	195,3795	3	9
252,9094	28	676	195,3788	10	100
252,9113	7	49	195,3792	6	36
252,9115	5	25	195,3794	4	16
252,9119	1	1	195,3794	4	16
252,9115	5	25	195,3791	7	49
252,9118	2	4	195,3791	7	49
$\overline{m} = 252{,}9120 \cdot 10^{-3}$ кг $S^2_{\overline{m}} = 213 \cdot 10^{-14}$ кг^2			$\overline{V} = 195{,}3798 \cdot 10^{-6}$ м^3 $S^2_{\overline{V}} = 180 \cdot 10^{-20}$ м^6		

* Данные для примера предоставлены С. И. Торопиным.

Зависимость измеряемой величины от аргументов нелинейна, поэтому для статистической обработки результатов наблюдений следует воспользоваться методом линеаризации. Предварительно следует проверить, выполняется ли неравенство (3.23), т. е. выполняется ли условие, необходимое для линеаризации нелинейной функции.

При линеаризации функции $\rho = \frac{m}{V}$ остаточный член R равен

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial V^2}(\Delta V)^2 + \frac{\partial^2\rho}{\partial m^2}(\Delta m)^2 + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial m\partial V}\Delta m\cdot\Delta V\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cdot\frac{\bar{m}}{\bar{V}}(\Delta V)^2 - 2\cdot\frac{1}{\bar{V}^2}\Delta V\cdot\Delta m\right] = \frac{\bar{m}}{\bar{V}^3}(\Delta V)^2 - \frac{1}{\bar{V}^2}\Delta V\cdot\Delta m.$$

Числовое значение R равно ($\Delta V_{max} = 32\cdot10^{-10}$ м³, $\Delta m_{max} = 31\cdot10^{-7}$ кг из табл. 10.2)

$$R = \frac{252{,}912\cdot10^{-3}}{(195{,}3798\cdot10^{-6})^3}\cdot(32\cdot10^{-10})^2 + \frac{32\cdot10^{-10}\cdot31\cdot10^{-7}}{(195{,}3798\cdot10^{-6})^3} =$$

$$= 0{,}0347240\cdot10^{-5} + 0{,}0259867\cdot10^{-5} = 0{,}0607107\cdot10^{-5} \approx 6\cdot10^{-7}.$$

Знаки у слагаемых взяты одинаковыми, так как погрешности ΔV и Δm — случайные.

Числовое значение R необходимо сравнить с числовым значением $0{,}8\cdot S_{\bar{\rho}}$. Числовое значение $S_{\bar{\rho}}$ равно

$$S_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{V}}\right)^2\cdot S^2_{\bar{m}} + \left(\frac{\bar{m}}{\bar{V}^2}\right)^2\cdot S^2_{\bar{V}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{213\cdot10^{-14}}{11\cdot38173{,}2662\cdot10^{-12}} + \frac{(252{,}912\cdot10^{-3})^2\cdot180\cdot10^{-20}}{(38173{,}2662\cdot10^{-12})^2}} \approx 0{,}012.$$

Так как $0{,}0000007 < 0{,}8\cdot0{,}0024$, то условие (3.23) выполняется, а для обработки результатов наблюдений возможно применение метода линеаризации.

Согласно п. 4.2 результат вычисляют по формуле (4.2)

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\bar{V}} \approx 1{,}29446\cdot10^{-3}\ \text{кг/м}^3.$$

Оценку СКО результата вычисляют по формуле (5.4)

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2\cdot S^2_{\bar{m}} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial V}\right)^2\cdot S^2_{\bar{V}}},$$

$$S = 0{,}012\ \text{кг/м}^3$$

Запись результата, согласно п. 8, можно представить в виде

$$\bar{\rho} = 1{,}294463\cdot10^{-3}\ \text{кг/м}^3,\quad S = 0{,}012\ \text{кг/м}^3,\quad n_1 = n_2 = 11.$$

Пример 3. Определение приведенной площади по формуле

$$F_2 = F_1\cdot\frac{m_2}{m_1}.$$

В результате измерений, проводившихся с целью определения приведенной площади F_2 поршня грузопоршневого манометра по заданному значению $F_1 = 1{,}000560$ см² площади поршня образцового манометра получены следующие результаты [4] (табл. 10.3).

Таблица 10.3

Масса m_{1i} груза, действующего на поршень образцового манометра, кг	Масса m_{2i} груза, действующего на поршень испытуемого манометра, кг	Масса m_{1i} груза, действующего на поршень образцового манометра, кг	Масса m_{2i} груза, действующего на поршень испытуемого манометра, кг
10,0000	10,0109	60,0000	60,0603
20,0000	20,0236	50,0000	50,0519
30,0000	30,0294	40,0000	40,0405
40,0000	40,0415	30,0000	30,0267
50,0000	50,0495	20,0000	20,0180
60,0000	60,0588	10,0000	10,0104

Приведенная площадь поршня F_2 определяется по уравнению

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{m_2}{m_1}.$$

Значение F_1 точно известно, следовательно, надо оценить отношение $A = \frac{m_2}{m_1}$. Найдем оценку $\tilde{A}$ и ее погрешность методом наименьших квадратов, так как случайная погрешность измерения аргумента m_1 отсутствует.

Согласно формуле (3.34)

$$\tilde{A} = \frac{\sum_{i=1}^{12} m_{1i} \cdot m_{2i}}{\sum_{i=1}^{12} m_{1i}^2}.$$

Подставив результаты наблюдений при измерении аргументов m_1 и m_2, получим

$$\tilde{A} = 1{,}001001.$$

Соответственно оценку СКО находим по формуле (3.35)

$$S = 1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда искомая площадь F_2 будет

$$\tilde{F}_2 = 1{,}001001 \cdot 1{,}000560 \approx 1{,}00156 \text{ см}^2$$

и СКО этого результата

$$S_{\tilde{F}_2} = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2.$$

Пример 4. Определение отношения и сил ионизационных токов при сравнении рабочего эталона единицы массы радия—226 с государственным эталоном единицы массы радия по формуле

$$Y = \frac{u_р \cdot C_р t_г}{u_г \cdot C_г \cdot t_р}{}^{*}.$$

* Данные для примера предоставлены А. Ф. Дричко.

Измерение производится на эталонной установке УЭА-4. Компенсационным методом измеряется сила ионизационного тока государственного эталона массы радия и сила ионизационного тока рабочего эталона. Отношение сил токов равно отношению масс радия, и при известной массе радия государственного эталона $m_г$ можно найти массу радия рабочего эталона $m_р$:

$$m_р = m_г \cdot Y,$$

где Y — отношение сил ионизационных токов.

В соответствии с компенсационным методом, используемым в установке УЭА-4, отношение сил токов определяется соотношением

$$Y = \frac{u_р C_р t_г}{u_г C_г t_р},$$

где $C_р$ и $C_г$ — емкости конденсаторов, используемых при измерениях сил ионизационных токов рабочего и государственного эталонов массы радия соответственно; $u_р$ и $u_г$ — напряжения компенсации, устанавливаемые в цепях измерения ионизационных токов рабочего и государственного эталонов массы радия; $t_г$ и $t_р$ — время компенсации ионизационных токов государственного и рабочего эталонов массы радия. В условиях эксперимента напряжение компенсации измерялось вольтметром кл. 0,1 с диапазоном измерений 0—15 В.

Время компенсации измерялось секундомером С—5 с ценой деления 0,1 с. При измерении устанавливается выбранное напряжение и фиксируется соответствующее ему время компенсации.

Напряжения компенсации устанавливались равными $u_г = 7{,}00$ В и $u_р = 8{,}00$ В.

Погрешности измерений и установления напряжений лежат в пределах

$$\delta(u_г) = \pm 0{,}1 \cdot \frac{15}{7} = \pm 0{,}21\%, \quad \delta(u_р) = \pm 0{,}1 \cdot \frac{15}{8} = \pm 0{,}19\%.$$

Каждому напряжению компенсации соответствует свое время компенсации. Поэтому погрешность измерений $u_г$ и $u_р$ приводит к отклонению $t_г$ и $t_р$ от их истинных значений. При этом при повторных наблюдениях случайная погрешность измерения напряжения вызовет рассеивание результатов наблюдений времени компенсации. Систематическая же погрешность измерения напряжения приводит к постоянному смещению всех результатов наблюдений времени компенсации. Поэтому для анализа погрешностей измерений нужно разделить погрешности измерений напряжения компенсации на систематические и случайные составляющие.

Случайная погрешность вольтметра экспериментально не определялась. Ее можно оценить на основе нормативных документов. Согласно ГОСТ 1845—59, вариация показаний приборов постоянного тока не должна превышать обозначения их класса. Следовательно, случайная погрешность вольтметра, равная в данном случае случайной погрешности измерения напряжения, будет лежать в границах

$$\varepsilon(u) = \pm 0{,}1\%.$$

Систематическая составляющая, соответственно, будет $\theta(u) = \pm 0{,}1\%$ (полагая, что $\delta(u_г) = \delta(u_р) = \pm 0{,}2\%$).

В соответствии с методом измерений, равные систематические погрешности измерения $u_г$ и $u_р$ не повлияют на результат измерения. Однако показания вольтметра при измерениях $u_г$ и $u_р$ различны, и нет оснований считать эти погрешности одинаковыми. Поэтому эти погрешности нужно учесть при оценивании погрешности результата измерения.

Случайная же составляющая погрешности измерения напряжения приводит к тому, что при каждом наблюдении напряжение компенсации несколько отличается от номинального. Соответственно изменяется время компенсации. Эксперимент производится путем многократного установления напряжения компенсации и измерения времени компенсации. Наблюдаемое рассеивание времени компенсации, как уже отмечалось, включает в себя влияние случайной погрешности измерения и установки напряжения компенсации. Поэтому отдельно последние учитывать не нужно.

Результаты наблюдений $t_г$ и $t_р$, выполненные в течение одного дня, представлены в табл. 10.4.

Таблица 10.4

$t_г$	74,4	74,6	74,3	74,6	74,4	74,4	74,4
	74,4	74,4	74,3	74,5	74,4	74,5	74,4
$t_р$	70,4	70,1	70,3	70,3	70,1	70,4	70,2
	70,4	70,2	70,1	70,2	70,2	70,2	70,2

Продолжение табл. 10.4

$t_г$	74,6	74,2	74,5	74,3	74,4	74,4	74,5
	74,5	74,3	74,3	74,3	74,4	74,5	
$t_р$	70,2	70,3	70,4	70,0	70,3	70,1	70,2
	70,3	70,2	70,3	70,2	70,2	70,3	

В установке УЭА—4 в качестве емкостей $C_г$ и $C_р$ используется емкость одного и того же конденсатора КВМ—4. Поэтому на результаты измерений влияет не погрешность измерения емкости, а ее изменение за время эксперимента, которое может быть вызвано только изменением температуры (влияние влажности воздуха исключается).

Температурный коэффициент емкости конденсатора КВМ—4 не превышает 0,003% на 1° С. Изменение температуры за время измерения не превышает 5° С. Следовательно, изменение емкости не превышает 0,015%. Этой погрешностью можно пренебречь.

Перейдем к определению результата измерения и его погрешностей. В связи с изложенным приведенная выше расчетная формула принимает вид

$$Y = \frac{u_р \cdot t_г}{u_г \cdot t_р}.$$

Так как по условиям выполнения измерений сначала получают группу наблюдений $t_г$, а затем $t_р$, то нельзя воспользоваться методом приведения. Задачу можно решать методом линеаризации или методом перебора. Приведем решение методом перебора. Систематические погрешности измерений $u_р$ и $u_г$ будем считать независимыми. Независимы также погрешности измерений времени компенсации. Функцию $Y = \frac{u_р \cdot t_г}{u_г \cdot t_р}$ можно представить в виде произведения функций отдельных аргументов, т. е.

$$Y = u_р \cdot t_г \cdot \frac{1}{u_г} \cdot \frac{1}{t_р}.$$

Следовательно, согласно формуле (40), в качестве оценки измеряемой величины принимаем

$$\bar{A} = \bar{u}_р \cdot \bar{t}_г \cdot \overline{\left(\frac{1}{u_г}\right)} \cdot \overline{\left(\frac{1}{t_р}\right)}.$$

В качестве оценки параметра случайной погрешности результатов принимаем, согласно формуле (5.8),

$$S^2 = (A)^2 \left[\frac{S^2(\bar{t}_г)}{(\bar{t}_г)^2} + \frac{S^2(\bar{u}_р)}{(\bar{u}_р)^2} + \frac{S^2\overline{\left(\frac{1}{u_г}\right)}}{\overline{\left(\frac{1}{u_г}\right)}^2} + \frac{S^2\overline{\left(\frac{1}{t_р}\right)}}{\overline{\left(\frac{1}{t_р}\right)}^2} \right].$$

Найдем необходимые данные $\bar{t}_г$ и $S^2(\bar{t}_г)$; $\bar{u}_р$ и $S^2(\bar{u}_р)$;

$$\overline{\left(\frac{1}{u_г}\right)} \quad \text{и} \quad S^2\overline{\left(\frac{1}{u_г}\right)}; \quad \overline{\left(\frac{1}{t_р}\right)} \quad \text{и} \quad S^2\overline{\left(\frac{1}{t_р}\right)}.$$

Вычисления, необходимые для нахождения $\bar{t}_г$ и $S^2(\bar{t}_г)$, представлены в табл. 10.5.

Таблица 10.5

$t_{гi}$	m_i	$\frac{m_i}{n}$	$\frac{m_i}{n} \cdot t_{гi}$	$t_{гi} - \bar{t}_г$	$(t_{гi} - \bar{t}_г)^2$	$(t_{гi} - \bar{t}_г)^2 \cdot \frac{m_i}{n}$
74,6	3	0,111	8,288	0,19	0,0361	0,004014
74,5	6	0,222	16,554	0,09	0,0081	0,0018
74,4	11	0,407	30,310	0,01	0,0001	0,0041
74,3	6	0,222	16,509	0,11	0,0121	0,0027
74,2	1	0,037	2,745	0,21	0,0441	0,0016
$\Sigma = 74,406$ $\bar{t}_г = 74,41$ с						$\Sigma = 0,0142$ $S^2(t_г) = 0,0142$ $S^2(\bar{t}_г) = 5 \cdot 10^{-4}$ с^2

Согласно условию эксперимента, $\tilde{u}_p = 8$ В.

Считая, что систематическая составляющая погрешности для совокупности приборов имеет равномерное распределение, находим

$$S^2(u_p) = \frac{(8 \cdot 0,001)^2}{3} = 21 \cdot 10^{-6}\ B^2.$$

Для расчета $\left(\widetilde{\frac{1}{u_r}}\right)$ и $S^2\left(\widetilde{\frac{1}{u_r}}\right)$, основываясь на приведенном предположении о равномерности распределения погрешностей измерения u_r с плотностью $p(x) = \frac{1}{0,014}$, получаем

$$M\left[\frac{1}{u_r}\right] = \int_{6,993}^{7,007} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{0,014} dx = \frac{1}{0,014} \ln \frac{7,007}{6,993} = 0,142857,$$

$$D\left[\frac{1}{u_r}\right] = M_2\left[\frac{1}{u_r}\right] - \left\{M\left[\frac{1}{u_r}\right]\right\}^2,$$

где $M_2\left[\frac{1}{u_r}\right]$ — второй начальный момент случайной величины $\frac{1}{u_r}$,

$$M_2\left[\frac{1}{u_r}\right] = \int_{6,993}^{7,007} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{0,014} dx = \frac{1}{7,007 \cdot 6,993} = 0,020408183.$$

Следовательно,

$$D\left[\frac{1}{u_r}\right] = 0,020408183 - 0,020408151 = 32 \cdot 10^{-9}.$$

Вычисления, необходимые для нахождения $\left(\widetilde{\frac{1}{t_p}}\right)$ и $S^2\left(\widetilde{\frac{1}{t_p}}\right)$, представлены в табл. 10.6.

Находим

$$\widetilde{\frac{1}{t_p}} = 0,014238 \frac{1}{c}, \quad S^2\left(\widetilde{\frac{1}{t_p}}\right) = 28 \cdot 10^{-12} \frac{1}{c^2}.$$

Подставим полученные значения в формулу для вычисления результата измерения:

$$\tilde{A} = 74,41 \cdot 8 \cdot 0,142857 \cdot 0,014238 = 1,209585 \approx 1,2096.$$

Оценку дисперсии $\tilde{A}$ находим по формуле (5.8):

$$S^2(\tilde{A}) = (1,2096)^2 \cdot \left[\frac{5 \cdot 10^{-4}}{74,41^2} + \frac{21 \cdot 10^{-6}}{64} + \frac{32 \cdot 10^{-9}}{(0,142857)^2} + \frac{28 \cdot 10^{-12}}{(0,014238)}\right] = 229\,869 \cdot 10^{-11},$$

$$S(\tilde{A}) \approx 0,0018.$$

Таблица 10.6

$\frac{1}{t_{pi}}$	Частота m_i	$\frac{1}{t_{pi}} \cdot m_i$	$\left(\frac{1}{t_{pi}} - \frac{\bar{1}}{t_p}\right) \times 10^6$	$\left(\frac{1}{t_{pi}} - \frac{\bar{1}}{t_p}\right)^2 \times 10^{12}$	$\left(\frac{1}{t_{pi}} - \frac{\bar{1}}{t_p}\right)^2 \times m_i \cdot 10^{12}$
$\frac{1}{70,4}$	4	0,056818	34	1156	12716
$\frac{1}{70,3}$	7	0,099573	7	49	539
$\frac{1}{70,2}$	11	0,156690	13	169	1183
$\frac{1}{70,0}$	1	0,014285	48	2304	2304
$\frac{1}{70,1}$	4	0,057061	27	729	2916
		$\Sigma = 0,384427$			$\Sigma = 19658 \cdot 10^{-12}$

Следовательно, результат измерения можно написать в виде

$$\bar{A} = 1,2096; \quad S = 0,0018.$$

Пользуясь методом линеаризации, получим

$$\bar{A}' = 1,2109; \quad S' = 0,0017.$$

Хорошее согласование результатов свидетельствует о допустимости применения линеаризации для рассматриваемой задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Критические значения статистики v [15]

а) при уровне значимости $q = 10\%$

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
3	2	2,353	2,269	2,155	2,056	2,015	2,062	2,202	2,415	2,651	2,843	2,920
	3	2,353	2,272	2,161	2,051	1,972	1,943	1,972	2,051	2,161	2,272	2,353
4	2	2,132	2,065	1,992	1,947	1,959	2,047	2,212	2,433	2,664	2,847	2,920
	3	2,132	2,066	1,991	1,928	1,896	1,906	1,960	2,052	2,165	2,274	2,353
	4	2,132	2,067	1,991	1,923	1,876	1,860	1,876	1,923	1,991	2,067	2,132
5	2	2,015	1,961	1,912	1,895	1,934	2,044	2,221	2,445	2,673	2,850	2,920
	3	2,015	1,961	1,907	1,869	1,861	1,889	1,956	2,054	2,167	2,275	2,353
	4	2,015	1,961	1,906	1,801	1,836	1,837	1,867	1,921	1,992	2,067	2,132
	5	2,015	1,961	1,905	1,857	1,824	1,812	1,824	1,857	1,905	1,961	2,015
6	2	1,943	1,899	1,865	1,866	1,922	2,044	2,228	2,453	2,679	2,852	2,920
	3	1,943	1,898	1,858	1,835	1,840	1,880	1,954	2,056	2,170	2,276	2,353
	4	1,943	1,898	1,855	1,824	1,812	1,825	1,862	1,921	1,993	2,068	2,132
	5	1,943	1,898	1,854	1,819	1,799	1,798	1,817	1,854	1,905	1,962	2,015
	6	1,943	1,898	1,853	1,816	1,791	1,782	1,791	1,816	1,853	1,898	1,943
7	2	1,895	1,857	1,834	1,847	1,914	2,045	2,234	2,460	2,683	2,854	2,920
	3	1,895	1,856	1,825	1,812	1,827	1,875	1,954	2,057	2,171	2,277	2,353
	4	1,895	1,856	1,822	1,800	1,797	1,817	1,859	1,920	1,993	2,068	2,132
	5	1,895	1,856	1,820	1,794	1,783	1,789	1,813	1,853	1,905	1,962	2,015
	6	1,895	1,856	1,819	1,790	1,774	1,772	1,786	1,814	1,853	1,898	1,943
	7	1,895	1,856	1,818	1,788	1,768	1,761	1,768	1,788	1,818	1,856	1,895

Продолжение табл. 1

k_c	k_i	ε										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
8	2	1,860	1,828	1,812	1,834	1,909	2,046	2,238	2,465	2,687	2,855	2,920
	3	1,860	1,826	1,802	1,797	1,819	1,871	1,954	2,058	2,172	2,277	2,353
	4	1,860	1,826	1,798	1,783	1,787	1,811	1,857	1,920	1,994	2,068	2,132
	5	1,860	1,826	1,796	1,777	1,771	1,782	1,810	1,852	1,905	1,962	2,015
	6	1,860	1,825	1,795	1,773	1,762	1,765	1,782	1,812	1,853	1,898	1,943
	7	1,860	1,825	1,794	1,770	1,756	1,754	1,764	1,786	1,818	1,856	1,895
	8	1,860	1,825	1,794	1,768	1,752	1,746	1,752	1,768	1,794	1,825	1,860
9	2	1,833	1,806	1,796	1,825	1,906	2,047	2,242	2,469	2,689	2,856	2,920
	3	1,833	1,804	1,785	1,785	1,812	1,869	1,954	2,059	2,173	2,278	2,353
	4	1,833	1,803	1,781	1,771	1,779	1,807	1,856	1,920	1,994	2,068	2,132
	5	1,833	1,803	1,778	1,764	1,763	1,777	1,808	1,852	1,905	1,962	2,015
	6	1,833	1,803	1,777	1,759	1,753	1,760	1,780	1,811	1,852	1,898	1,943
	7	1,833	1,803	1,776	1,757	1,747	1,748	1,761	1,785	1,818	1,856	1,895
	8	1,833	1,803	1,775	1,755	1,742	1,740	1,748	1,767	1,793	1,825	1,860
	9	1,833	1,803	1,775	1,753	1,739	1,734	1,739	1,753	1,775	1,803	1,833
10	2	1,812	1,788	1,784	1,818	1,904	2,049	2,245	2,472	2,691	2,356	2,920
	3	1,812	1,787	1,772	1,777	1,807	1,867	1,954	2,060	2,174	2,278	2,353
	4	1,812	1,786	1,767	1,761	1,773	1,804	1,855	1,920	1,994	2,068	2,132
	5	1,812	1,786	1,765	1,754	1,756	1,774	1,806	1,851	1,905	1,962	2,015
	6	1,812	1,785	1,763	1,749	1,746	1,756	1,778	1,811	1,852	1,898	1,943
	7	1,812	1,785	1,762	1,746	1,740	1,744	1,759	1,784	1,817	1,856	1,895
	8	1,812	1,785	1,761	1,744	1,735	1,736	1,746	1,766	1,793	1,825	1,860
	9	1,812	1,785	1,761	1,742	1,732	1,729	1,736	1,752	1,775	1,803	1,833
	10	1,812	1,785	1,760	1,741	1,729	1,725	1,729	1,741	1,760	1,785	1,812
12	2	1,782	1,764	1,767	1,808	1,901	2,051	2,250	2,477	2,695	2,857	2,920
	3	1,782	1,762	1,753	1,764	1,800	1,864	1,954	2,062	2,175	2,279	2,353

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	4	1,782	1,761	1,748	1,748	1,765	1,800	1,853	1,920	1,995	2,069	2,132
	5	1,782	1,760	1,745	1,740	1,747	1,769	1,804	1,851	1,905	1,962	2,015
	6	1,782	1,760	1,743	1,735	1,737	1,750	1,775	1,810	1,852	1,898	1,943
	7	1,782	1,760	1,742	1,731	1,730	1,738	1,756	1,783	1,817	1,856	1,895
	8	1,782	1,760	1,741	1,729	1,725	1,729	1,743	1,764	1,792	1,825	1,860
	9	1,782	1,760	1,741	1,727	1,721	1,723	1,733	1,750	1,774	1,802	1,833
	10	1,782	1,759	1,740	1,726	1,718	1,718	1,725	1,739	1,760	1,785	1,812
	12	1,782	1,759	1,739	1,724	1,714	1,711	1,714	1,724	1,739	1,759	1,782
15	2	1,753	1,740	1,750	1,799	1,898	2,053	2,255	2,482	2,698	2,858	2,920
	3	1,753	1,738	1,735	1,752	1,794	1,862	1,954	2,063	2,177	2,279	2,353
	4	1,753	1,737	1,729	1,735	1,757	1,796	1,852	1,920	1,995	2,069	2,132
	5	1,753	1,736	1,726	1,726	1,738	1,764	1,802	1,850	1,905	1,962	2,015
	6	1,753	1,736	1,724	1,721	1,727	1,745	1,772	1,809	1,852	1,898	1,943
	7	1,753	1,735	1,723	1,717	1,720	1,732	1,753	1,782	1,817	1,856	1,895
	8	1,753	1,735	1,722	1,715	1,715	1,723	1,739	1,763	1,792	1,825	1,860
	9	1,753	1,735	1,721	1,713	1,711	1,717	1,729	1,749	1,774	1,802	1,833
	10	1,753	1,735	1,721	1,711	1,708	1,711	1,721	1,738	1,759	1,785	1,812
	12	1,753	1,735	1,720	1,709	1,704	1,704	1,710	1,722	1,739	1,759	1,782
	15	1,753	1,735	1,719	1,707	1,700	1,697	1,700	1,707	1,719	1,735	1,753
20	2	1,725	1,717	1,734	1,790	1,897	2,056	2,261	2,487	2,701	2,859	2,920
	3	1,725	1,715	1,718	1,741	1,788	1,861	1,955	2,065	2,178	2,280	2,353
	4	1,725	1,713	1,712	1,723	1,750	1,793	1,851	1,920	1,996	2,069	2,132
	5	1,725	1,713	1,708	1,713	1,730	1,759	1,800	1,850	1,905	1,962	2,015
	6	1,725	1,712	1,706	1,708	1,719	1,740	1,770	1,808	1,852	1,898	1,943
	7	1,725	1,712	1,705	1,704	1,711	1,727	1,750	1,781	1,817	1,856	1,895
	8	1,725	1,712	1,704	1,701	1,706	1,717	1,736	1,761	1,792	1,825	1,860

б) при уровне значимости $q = 5\%$

k_2	k_1	c 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
3	2	3,182	3,032	2,825	2,645	2,571	2,658	2,923	3,328	3,782	4,153	4,303
	3	3,182	3,037	2,837	2,640	2,498	2,447	2,498	2,640	2,837	3,037	3,182
4	2	2,776	2,661	2,534	2,453	2,476	2,638	2,948	3,366	3,809	4,162	4,303
	3	2,776	2,662	2,533	2,424	2,368	2,385	2,481	2,644	2,845	3,041	3,182
	4	2,776	2,664	2,534	2,416	2,335	2,306	2,335	2,416	2,534	2,664	2,776
5	2	2,571	2,479	2,395	2,366	2,436	2,637	2,968	3,391	3,827	4,168	4,303
	3	2,571	2,479	2,388	2,323	2,308	2,358	2,475	2,648	2,850	3,043	3,182
	4	2,571	2,480	2,386	2,309	2,267	2,270	2,320	2,414	2,535	2,665	2,776
	5	2,571	2,480	2,385	2,303	2,248	2,228	2,248	2,303	2,385	2,480	2,571
6	2	2,447	2,373	2,315	2,317	2,417	2,640	2,984	3,409	3,839	4,172	4,303
	3	2,447	2,372	2,304	2,265	2,275	2,344	2,474	2,652	2,854	3,045	3,182
	4	2,447	2,372	2,300	2,248	2,228	2,249	2,313	2,413	2,536	2,665	2,776
	5	2,447	2,372	2,298	2,239	2,206	2,205	2,237	2,300	2,385	2,480	2,571
	6	2,447	2,372	2,297	2,235	2,193	2,179	2,193	2,235	2,297	2,372	2,447
7	2	2,365	2,303	2,264	2,286	2,406	2,645	2,997	3,422	3,848	4,175	4,303
	3	2,365	2,301	2,249	2,228	2,254	2,336	2,473	2,655	2,857	3,046	3,182
	4	2,365	2,301	2,244	2,208	2,203	2,236	2,308	2,412	2,537	2,666	2,776
	5	2,365	2,301	3,242	2,198	2,179	2,189	2,230	2,298	2,385	2,480	2,571
	6	2,365	2,300	2,240	2,193	2,165	2,162	1,185	2,232	2,296	2,372	2,447
	7	2,365	2,300	2,239	2,189	2,156	2,145	2,156	2,189	2,239	2,300	2,365
8	2	2,306	2,254	2,228	2,266	2,400	2,649	3,007	3,433	3,855	4,177	4,303
	3	2,306	2,252	2,211	2,203	2,240	2,330	2,474	2,658	2,859	3,047	3,182

Продолжение табл. 1

k_2	k_1	c = 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	4	2,306	2,251	2,205	2,181	2,186	2,228	2,305	2,412	2,538	2,666	2,776
	5	2,306	2,250	2,202	2,170	2,161	2,179	2,225	2,296	2,385	2,481	2,571
	6	2,306	2,250	2,200	2,163	2,146	2,151	2,179	2,230	2,296	2,372	2,447
	7	2,306	2,250	2,199	2,159	2,136	2,133	2,150	2,186	2,238	2,300	2,365
	8	2,306	2,250	2,198	2,156	2,129	2,120	2,120	2,156	2,198	2,250	2,306
9	2	2,262	2,217	2,202	2,251	2,396	2,653	3,015	3,441	3,860	4,179	4,303
	3	2,262	2,215	2,183	2,184	2,229	2,327	2,474	2,660	2,861	3,047	3,182
	4	2,262	2,214	2,176	2,160	2,174	2,222	2,303	2,412	2,539	2,667	2,776
	5	2,262	2,213	2,173	2,149	2,147	2,171	2,222	2,295	2,385	2,481	2,571
	6	2,262	2,213	2,171	2,142	2,131	2,142	2,175	2,228	2,296	2,372	2,447
	7	2,262	2,213	2,169	2,137	2,121	2,124	2,145	2,184	2,238	2,300	2,365
	8	2,262	2,213	2,168	2,134	2,114	2,111	2,124	2,154	2,197	2,250	2,306
	9	2,262	2,213	2,168	2,132	2,109	2,101	2,109	2,132	2,168	2,213	2,252
10	2	2,228	2,189	2,182	2,240	2,393	2,657	3,022	3,448	3,865	4,180	4,303
	3	2,228	2,186	2,162	2,170	2,222	2,324	2,475	2,662	2,863	3,048	3,182
	4	2,228	2,185	2,154	2,145	2,165	2,217	2,301	2,413	2,540	2,667	2,776
	5	2,228	2,185	2,151	2,133	2,137	2,166	2,219	2,295	2,385	2,481	2,571
	6	2,228	2,184	2,148	2,125	2,121	2,136	2,172	2,227	2,296	2,372	2,447
	7	2,228	2,184	2,147	2,121	2,110	2,117	2,142	2,183	2,238	2,300	2,365
	8	2,228	2,184	2,145	2,117	2,103	2,103	2,120	2,152	2,197	2,250	2,306
	9	2,228	2,184	2,145	2,115	2,097	2,094	2,105	2,130	2,167	2,212	2,262
	10	2,228	2,184	2,144	2,113	2,093	2,086	2,093	2,113	2,144	2,184	2,228
12	2	2,179	2,149	2,154	2,225	2,390	2,663	3,032	3,458	3,871	4,182	4,303
	3	2,179	2,146	2,131	2,150	2,211	2,321	2,476	2,665	2,865	3,049	3,182
	4	2,179	2,144	2,123	2,123	2,151	2,210	2,300	2,413	2,541	2,667	2,776

Продолжение табл. 1

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
		$k_{кр}$										
	5	2,179	2,143	2,118	2,110	2,122	2,158	2,216	2,294	2,385	2,481	2,571
	6	2,179	2,143	2,116	2,102	2,105	2,127	2,168	2,225	2,295	2,372	2,447
	7	2,179	2,143	2,114	2,097	2,094	2,107	2,137	2,181	2,237	2,300	2,365
	8	2,179	2,142	2,113	2,093	2,086	2,093	2,115	2,150	2,196	2,250	2,306
	9	2,179	2,142	2,112	2,090	2,080	2,083	2,099	2,127	2,166	2,212	2,262
	10	2,179	2,142	2,111	2,088	2,076	2,075	2,087	2,110	2,143	2,183	2,228
	12	2,179	2,142	2,110	2,085	2,069	2,064	2,069	2,085	2,110	2,142	2,179
15	2	2,131	2,110	2,127	2,211	2,389	2,670	3,043	3,469	3,878	4,185	4,303
	3	2,131	2,107	2,103	2,131	2,202	2,318	2,478	2,668	2,868	3,050	3,182
	4	2,131	2,105	2,093	2,103	2,139	2,205	2,298	2,414	2,542	2,668	2,776
	5	2,131	2,104	2,088	2,088	2,108	2,150	2,213	2,293	2,386	2,481	2,571
	6	2,131	2,104	2,085	2,080	2,090	2,119	2,164	2,224	2,295	2,372	2,447
	7	2,131	2,103	2,083	2,074	2,079	2,098	2,132	2,179	2,237	2,300	2,365
	8	2,131	2,103	2,082	2,070	2,070	2,084	2,110	2,148	2,196	2,250	2,306
	9	2,131	2,103	2,081	2,067	2,064	2,073	2,094	2,125	2,165	2,212	2,262
	10	2,131	2,103	2,080	2,065	2,060	2,065	2,081	2,107	2,142	2,183	2,228
	12	2,131	2,102	2,078	2,061	2,053	2,053	2,063	2,082	2,109	2,142	2,179
	15	2,131	2,102	2,077	2,058	2,046	2,042	2,046	2,058	2,077	2,102	2,131
20	2	2,086	2,074	2,102	2,199	2,388	2,677	3,055	3,479	3,885	4,187	4,303
	3	2,086	2,070	2,075	2,114	2,193	2,316	2,480	2,671	2,871	3,051	3,182
	4	2,086	2,068	2,065	2,083	2,128	2,199	2,297	2,414	2,543	2,669	2,776
	5	2,086	2,067	2,060	2,068	2,096	2,143	2,210	2,293	2,386	2,482	2,571
	6	2,086	2,066	2,056	2,059	2,077	2,111	2,160	2,223	2,295	2,372	2,447
	7	2,086	2,066	2,054	2,053	2,064	2,089	2,128	2,177	2,236	2,300	2,365
	8	2,086	2,065	2,052	2,049	2,056	2,075	2,105	2,146	2,195	2,250	2,306

в) при уровне значимости $q = 2\%$

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
3	2	4,541	4,257	3,861	3,512	3,365	3,541	4,082	4,920	5,868	6,649	6,965
	3	4,541	4,265	3,884	3,509	3,240	3,143	3,240	3,509	3,884	4,265	4,541
4	2	3,747	3,539	3,306	3,155	3,198	3,522	4,147	5,006	5,929	6,669	6,965
	3	3,747	3,541	3,305	3,107	3,004	3,036	3,214	3,520	3,899	4,271	4,541
	4	3,747	3,543	3,308	3,096	2,949	2,896	2,949	3,096	3,308	3,543	3,747
5	2	3,365	3,206	3,054	3,000	3,136	3,532	4,198	5,064	5,968	6,682	6,965
	3	3,365	3,205	3,043	2,927	2,900	2,992	3,209	3,531	3,911	4,276	4,541
	4	3,365	3,205	3,040	2,905	2,830	2,835	2,925	3,093	3,311	3,545	3,747
	5	3,365	3,206	3,039	2,895	2,798	2,764	2,798	2,895	3,039	3,205	3,365
6	2	3,143	3,015	2,913	2,917	3,109	3,548	4,238	5,106	5,996	6,691	6,965
	3	3,143	3,013	2,895	2,827	2,844	2,970	3,209	3,540	3,919	4,279	4,541
	4	3,143	3,013	2,889	2,798	2,764	2,801	2,914	3,092	3,314	3,546	3,747
	5	3,143	3,013	2,886	2,784	2,727	2,724	2,780	2,890	3,039	3,206	3,365
	6	3,143	3,013	2,885	2,777	2,706	2,681	2,706	2,777	2,885	3,013	3,143
7	2	2,998	2,893	2,824	2,867	3,095	3,563	4,268	5,137	6,016	6,698	6,965
	3	2,998	2,890	2,801	2,764	2,810	2,958	3,210	3,547	3,926	4,282	4,541
	4	2,998	2,889	2,792	2,730	2,722	2,780	2,907	3,092	3,316	3,547	3,747
	5	2,998	2,889	2,788	2,714	2,682	2,699	2,770	2,887	3,039	3,207	3,365
	6	2,998	2,889	2,786	2,705	2,659	2,654	2,693	2,772	2,884	3,013	3,143
	7	2,998	2,889	2,785	2,699	2,644	2,624	2,644	2,699	2,785	2,889	2,998
8	2	2,896	2,808	2,764	2,834	3,089	3,577	4,293	5,161	6,032	6,703	6,965
	3	2,896	2,805	2,736	2,721	2,787	2,950	3,213	3,553	3,931	4,284	4,541

k_2	k_1	c = 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	4	2,896	2,804	2,726	2,684	2,694	2,767	2,902	3,093	3,318	3,548	3,747
	5	2,896	2,803	2,721	2,666	2,651	2,682	2,762	2,885	3,040	3,207	3,365
	6	2,896	2,803	2,718	2,656	2,626	2,635	2,684	2,769	2,883	3,013	3,143
	7	2,896	2,802	2,716	2,649	2,610	2,604	2,634	2,695	2,784	2,889	2,998
	8	2,896	2,802	2,715	2,645	2,599	2,583	2,599	2,645	2,715	2,802	2,896
9	2	2,821	2,746	2,720	2,810	3,086	3,589	4,313	5,180	6,044	6,706	6,965
	3	2,821	2,742	2,689	2,690	2,771	2,946	3,215	3,559	3,935	4,285	4,541
	4	2,821	2,741	2,678	2,650	2,674	2,757	2,900	3,094	3,320	3,549	3,747
	5	2,821	2,740	2,672	2,631	2,628	2,670	2,757	2,884	3,040	3,208	3,365
	6	2,821	2,739	2,669	2,620	2,602	2,621	2,677	2,767	2,883	3,013	3,143
	7	2,821	2,739	2,666	2,613	2,586	2,590	2,626	2,692	2,783	2,889	2,998
	8	2,821	2,739	2,665	2,608	2,574	2,568	2,591	2,641	2,714	2,802	2,896
	9	2,821	2,739	2,664	2,604	2,566	2,552	2,566	2,604	2,664	2,739	2,821
10	2	2,764	2,699	2,687	2,794	3,085	3,600	4,329	5,196	6,054	6,710	6,965
	3	2,764	2,695	2,653	2,667	2,759	2,943	3,217	3,563	3,938	4,287	4,541
	4	2,764	2,693	2,641	2,625	2,659	2,749	2,898	3,095	3,321	3,550	3,747
	5	2,764	2,692	2,635	2,605	2,612	2,661	2,753	2,883	3,041	3,208	3,365
	6	2,764	2,691	2,631	2,593	2,585	2,611	2,672	2,765	2,883	3,013	3,143
	7	2,764	2,691	2,628	2,585	2,567	2,579	2,621	2,690	2,782	2,889	2,998
	8	2,764	2,690	2,626	2,579	2,555	2,557	2,585	2,639	2,713	2,802	2,896
	9	2,764	2,690	2,625	2,575	2,546	2,540	2,559	2,601	2,663	2,739	2,821
	10	2,764	2,690	2,624	2,572	2,539	2,528	2,539	2,572	2,624	2,690	2,764
12	2	2,681	2,631	2,640	2,771	3,085	3,617	4,355	5,220	6,069	6,714	6,965
	3	2,681	2,626	2,602	2,634	2,743	2,939	3,222	3,570	3,944	4,289	4,541
	4	2,681	2,624	2,589	2,589	2,637	2,740	2,896	3,096	3,323	3,551	3,747

Продолжение табл. 1

k_2	k_1	ε 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	5	2,681	2,623	2,581	2,567	2,588	2,648	2,748	2,883	3,041	3,208	3,365
	6	2,681	2,622	2,577	2,554	2,559	2,596	2,665	2,763	2,883	3,014	3,143
	7	2,681	2,622	2,574	2,546	2,541	2,563	2,613	2,687	2,782	2,889	2,998
	8	2,681	2,621	2,572	2,540	2,528	2,540	2,576	2,635	2,712	2,802	2,896
	9	2,681	2,621	2,571	2,535	2,519	2,523	2,550	2,597	2,661	2,738	2,821
	10	2,681	2,621	2,569	2,532	2,511	2,510	2,530	2,568	2,623	2,690	2,764
	12	2,681	2,620	2,568	2,527	2,501	2,492	2,501	2,527	2,568	2,620	2,681
15	2	2,602	2,568	2,598	2,752	3,088	3,636	4,382	5,244	6,085	6,719	6,965
	3	2,602	2,562	2,555	2,604	2,728	2,937	3,227	3,577	3,949	4,291	4,541
	4	2,602	2,560	2,540	2,556	2,618	2,731	2,894	3,098	3,325	3,552	3,747
	5	2,602	2,558	2,532	2,532	2,566	2,636	2,744	2,882	3,042	3,209	3,365
	6	2,602	2,557	2,527	2,518	2,536	2,583	2,659	2,761	2,883	3,014	3,143
	7	2,602	2,557	2,523	2,509	2,516	2,548	2,605	2,684	2,781	2,889	2,998
	8	2,602	2,556	2,521	2,502	2,503	2,525	2,568	2,632	2,711	2,802	2,896
	9	2,602	2,556	2,519	2,497	2,493	2,507	2,541	2,593	2,660	2,738	2,821
	10	2,602	2,556	2,518	2,494	2,485	2,494	2,520	2,564	2,621	2,689	2,764
	12	2,602	2,555	2,516	2,488	2,474	2,475	2,491	2,522	2,566	2,620	2,681
	15	2,602	2,555	2,514	2,483	2,464	2,457	2,464	2,483	2,514	2,555	2,602
20	2	2,528	2,509	2,558	2,735	3,093	3,658	4,410	5,270	6,100	6,724	6,965
	3	2,528	2,502	2,511	2,577	2,716	2,936	3,233	3,585	3,955	4,293	4,541
	4	2,528	2,499	2,494	2,525	2,600	2,723	2,893	3,100	3,328	3,553	3,747
	5	2,528	2,497	2,485	2,499	2,545	2,626	2,740	2,882	3,043	3,210	3,365
	6	2,528	2,496	2,480	2,484	2,514	2,570	2,653	2,760	2,883	3,014	3,143
	7	2,528	2,495	2,476	2,474	2,493	2,535	2,598	2,682	2,781	2,889	2,998
	8	2,528	2,495	2,473	2,467	2,479	2,510	2,561	6,628	2,710	2,802	2,896

г) при уровне значимости $q = 1\%$

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
3	2	5,841	5,411	4,805	4,263	4,032	4,314	5,168	6,555	8,113	9,402	9,925
	3	5,841	5,420	4,838	4,267	3,856	3,707	3,856	4,267	4,838	5,420	5,841
4	2	4,604	4,302	3,955	3,726	3,794	4,306	5,311	6,706	8,217	9,437	9,925
	3	4,604	4,302	3,955	3,662	3,508	3,556	3,825	4,287	4,863	5,429	5,841
	4	4,604	4,305	3,960	3,648	3,432	3,355	3,432	3,648	3,960	4,305	4,604
5	2	4,032	3,805	3,583	3,502	3,714	4,338	5,405	6,808	8,286	9,459	9,925
	3	4,032	3,803	3,568	3,400	3,361	3,497	3,821	4,307	4,882	5,437	5,841
	4	4,032	3,803	3,565	3,370	3,262	3,269	3,401	3,645	3,965	4,307	4,604
	5	4,032	3,804	3,565	3,358	3,218	3,169	3,218	3,358	3,565	3,804	4,032
6	2	3,707	3,528	3,380	3,386	3,682	4,373	5,477	6,881	8,334	9,475	9,925
	3	3,707	3,525	3,356	3,257	3,283	3,469	3,824	4,322	4,895	5,442	5,841
	4	3,707	3,524	3,348	3,218	3,169	3,223	3,386	3,645	3,970	4,310	4,604
	5	3,707	3,524	3,344	3,200	3,118	3,115	3,195	3,351	3,565	3,805	4,032
	6	3,707	3,524	3,342	3,190	3,090	3,055	3,090	3,190	3,342	3,524	3,707
7	2	3,499	3,353	3,254	3,318	3,671	4,406	5,532	6,936	8,369	9,486	9,925
	3	3,499	3,349	3,222	3,169	3,236	3,454	3,830	4,335	4,906	5,446	5,841
	4	3,499	3,348	3,211	3,123	3,112	3,195	3,378	3,647	3,973	4,311	4,604
	5	3,499	3,347	3,206	3,102	3,056	3,080	3,180	3,348	3,566	3,805	4,032
	6	3,499	3,347	3,203	3,090	3,024	3,017	3,072	3,184	3,341	3,524	3,707
	7	3,499	3,347	3,201	3,082	3,004	2,977	3,004	3,082	3,201	3,347	3,499
8	2	3,355	3,233	3,169	3,274	3,667	4,434	3,577	6,979	8,396	9,495	9,925
	3	3,355	3,229	3,132	3,110	3,205	3,446	3,835	4,346	4,915	5,450	5,841

k_2	k_1	c										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	4	3,355	3,227	3,118	3,059	3,073	3,177	3,373	3,649	3,976	4,313	4,604
	5	3,355	3,226	3,111	3,035	3,013	3,057	3,171	3,346	3,566	3,806	4,032
	6	3,355	3,225	3,108	3,021	2,979	2,991	3,060	3,180	3,341	3,524	3,707
	7	3,355	3,225	3,105	3,012	2,957	2,949	2,990	3,076	3,200	3,347	3,499
	8	3,355	3,225	3,103	3,006	2,943	2,921	2,943	3,006	3,103	3,225	3,355
9	2	3,250	3,146	3,108	3,244	3,668	4,458	5,613	7,012	8,418	9,501	9,925
	3	3,250	3,141	3,066	3,068	3,184	3,441	3,841	4,354	4,922	5,452	5,841
	4	3,250	3,138	3,051	3,012	3,046	3,164	3,370	3,650	3,979	4,314	5,604
	5	3,250	3,137	3,043	2,986	2,982	3,041	3,164	3,345	3,567	3,807	4,032
	6	3,250	3,137	3,038	2,971	2,947	2,973	3,051	3,177	3,341	3,525	3,707
	7	3,250	3,136	3,035	2,961	2,924	2,930	2,980	3,073	3,199	3,347	3,499
	8	3,250	3,136	3,033	2,954	2,908	2,900	2,932	3,001	3,102	3,224	3,355
	9	3,250	3,136	3,032	2,949	2,897	2,878	2,897	2,949	3,032	3,136	3,250
10	2	3,169	3,080	3,063	3,223	3,671	4,479	5,642	7,040	8,435	9,507	9,925
	3	3,169	3,074	3,016	3,036	3,169	3,438	3,845	4,362	4,927	5,455	5,841
	4	3,169	3,072	3,000	2,978	3,025	3,155	3,368	3,652	3,981	4,315	4,604
	5	3,169	3,070	2,991	2,950	2,959	3,029	3,159	3,344	3,568	3,807	4,032
	6	3,169	3,069	2,986	2,934	2,922	2,959	3,045	3,175	3,341	3,525	3,707
	7	3,169	3,069	2,983	2,923	2,899	2,915	2,973	3,070	3,198	3,347	3,499
	8	3,169	3,068	2,980	2,916	2,882	2,884	2,924	2,998	3,101	3,224	3,355
	9	3,169	3,068	2,979	2,910	2,870	2,862	2,888	2,946	3,031	3,135	3,250
	10	3,169	3,068	2,977	2,906	2,861	2,845	2,861	2,906	2,977	3,068	3,169
12	2	3,055	2,987	3,000	3,196	3,678	4,513	5,689	7,083	8,462	9,515	9,925
	3	3,055	2,980	2,947	2,992	3,148	3,436	3,854	3,374	4,936	5,458	5,841
	4	3,055	2,977	2,928	2,929	2,997	3,142	3,366	3,655	3,985	4,317	4,604

Продолжение табл. 1

k_2	k_1	c = 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	5	3,055	2,975	2,918	2,898	2,927	3,012	3,153	3,343	3,569	3,808	4,032
	6	3,055	2,974	2,912	2,881	2,888	2,939	3,036	3,173	3,341	3,525	3,707
	7	3,055	2,973	2,909	2,869	2,863	2,893	2,962	3,066	3,198	3,347	3,499
	8	3,055	2,973	2,906	2,861	2,845	2,862	2,912	2,993	3,100	3,224	3,355
	9	3,055	2,973	2,904	2,855	2,833	2,839	2,875	2,940	3,029	3,135	3,250
	10	3,055	2,972	2,902	2,851	2,823	2,822	2,848	2,900	2,975	3,068	3,169
	12	3,055	2,972	2,900	2,844	2,809	2,797	2,809	2,844	2,900	2,972	3,055
15	2	2,947	2,900	2,943	3,173	3,690	4,550	5,737	7,126	8,489	9,524	9,925
	3	2,947	2,892	2,882	2,952	3,131	3,436	3,864	4,386	4,946	5,462	5,841
	4	2,947	2,888	2,861	2,884	2,971	3,131	3,365	3,659	3,989	4,319	4,604
	5	2,947	2,887	2,850	2,851	2,898	2,996	3,147	3,343	3,571	3,809	4,032
	6	2,947	2,885	2,844	2,832	2,856	2,921	3,028	3,170	3,341	3,526	3,707
	7	2,947	2,884	2,839	2,819	2,830	2,874	2,952	3,062	3,197	3,347	3,499
	8	2,947	2,884	2,836	2,811	2,811	2,841	2,901	2,989	3,099	3,224	3,355
	9	2,947	2,883	2,834	2,804	2,798	2,818	2,864	2,935	3,028	3,135	3,250
	10	2,947	2,883	2,832	2,799	2,787	2,800	2,836	2,895	2,974	3,067	3,169
	12	2,947	2,883	2,830	2,792	2,773	2,774	2,796	2,838	2,898	2,971	3,055
	15	2,947	2,882	2,827	2,785	2,759	2,750	2,759	2,785	2,827	2,882	2,947
20	2	2,845	2,819	2,891	3,156	3,705	4,591	5,787	7,171	8,516	9,532	9,925
	3	2,845	2,810	2,823	2,916	3,116	3,437	3,875	4,400	4,956	5,466	5,841
	4	2,845	2,806	2,799	2,842	2,948	3,122	3,365	3,663	3,993	4,321	4,604
	5	2,845	2,804	2,787	2,807	2,871	2,983	3,143	3,344	3,572	3,810	4,032
	6	2,845	2,802	2,780	2,786	2,827	2,905	3,020	3,169	3,341	3,526	3,707
	7	2,845	2,801	2,775	2,773	2,799	2,856	2,944	3,059	3,197	3,347	3,499
	8	2,845	2,801	2,772	2,764	2,780	2,822	2,891	2,985	3,098	3,224	3,355

Таблица 2

Критические значения статистики W критерия Вилкоксона

m	n	q 0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10
4	23	14	19	22	27	31	36
	24	15	20	23	27	32	38
	25	15	20	23	28	33	38
5	5	—	15	16	17	19	20
	6	—	16	17	18	20	22
	7	—	16	18	20	21	23
	8	15	17	19	21	23	25
	9	16	18	20	22	24	27
	10	16	19	21	23	26	28
	11	17	20	22	24	27	30
	12	17	21	23	26	28	32
	13	18	22	24	27	30	33
	14	18	22	25	28	31	35
	15	19	23	26	29	33	37
	16	20	24	27	30	34	38
	17	20	25	28	32	35	40
	18	21	26	29	33	37	42
	19	22	27	30	34	38	43
	20	22	28	31	35	40	45
	21	23	29	32	37	41	47
	22	23	29	33	38	43	48
	23	24	30	34	39	44	50
	24	25	31	35	40	45	51
	25	25	32	36	42	47	53
6	6	—	23	24	26	28	30
	7	21	24	25	27	29	32
	8	22	25	27	29	31	34
	9	23	26	28	31	33	36
	10	24	27	29	32	35	38
	11	25	28	30	34	37	40
	12	25	30	32	35	38	42
	13	26	31	33	37	40	44
	14	27	32	34	38	42	46
	15	28	33	36	40	44	48
	16	29	34	37	42	46	50
	17	30	36	39	43	47	52
	18	31	37	40	45	49	55
	19	32	38	41	46	51	57
	20	33	39	43	48	53	59
	21	33	40	44	50	55	61
	22	34	42	45	51	57	63
	23	35	43	47	53	58	65
	24	36	44	48	54	60	67
	25	37	45	50	56	62	69
7	7	29	32	34	36	39	41
	8	30	34	35	38	41	44
	9	31	35	37	40	43	46

m	n	q: 0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10
	10	33	37	39	42	45	49
	11	34	38	40	44	47	51
	12	35	40	42	46	49	54
	13	36	41	44	48	52	56
	14	37	43	45	50	54	59
	15	38	44	47	52	56	61
	16	39	46	49	54	58	64
	17	41	47	51	56	61	66
	18	42	49	52	58	63	69
	19	43	50	54	60	65	71
	20	44	52	56	62	67	74
	21	46	53	58	64	69	76
	22	47	55	59	66	72	79
	23	48	57	61	68	74	81
	24	49	58	63	70	76	84
	25	50	60	64	72	78	86
8	8	40	43	45	49	51	55
	9	41	45	47	51	54	58
	10	42	47	49	53	56	60
	11	44	49	51	55	59	63
	12	45	51	53	58	62	66
	13	47	53	56	60	64	69
	14	48	54	58	62	67	72
	15	50	56	60	65	69	75
	16	51	58	62	67	72	78
	17	53	60	64	70	75	81
	18	54	62	66	72	77	84
	19	56	64	68	74	80	87
	20	57	66	70	77	83	90
	21	59	68	72	79	85	92
	22	60	70	74	81	88	95
	23	62	71	76	84	90	98
	24	64	73	78	86	93	101
	25	65	75	81	89	96	104
9	9	52	56	59	62	66	70
	10	53	58	61	65	69	73
	11	55	61	63	68	72	76
	12	57	63	66	71	75	80
	13	59	65	68	73	78	83
	14	60	67	71	76	81	86
	15	62	69	73	79	84	90
	16	64	72	76	82	87	93
	17	66	74	78	84	90	97
	18	68	76	81	87	93	100
	19	70	78	83	90	96	103
	20	71	81	85	93	99	107
	21	73	83	88	95	102	110
	22	75	85	90	98	105	113
	23	77	88	93	101	108	117

m	n	q: 0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10
	24	79	90	95	104	111	120
	25	81	92	98	107	114	123
10	10	65	71	74	78	82	87
	11	67	73	77	81	86	91
	12	69	76	79	84	89	94
	13	72	79	82	88	92	98
	14	74	81	85	91	96	102
	15	76	84	88	94	99	106
	16	78	86	91	97	103	109
	17	80	89	93	100	106	113
	18	82	92	96	103	110	117
	19	84	94	99	107	113	121
	20	87	97	102	110	117	125
	21	89	99	105	113	120	128
	22	91	102	108	116	123	132
	23	93	105	110	119	127	136
	24	95	107	113	122	130	140
	25	98	110	116	126	134	144
11	11	81	87	91	96	100	106
	12	83	90	94	99	104	110
	13	86	93	97	103	108	114
	14	88	96	100	106	112	118
	15	90	99	103	110	116	123
	16	93	102	107	113	120	127
	17	95	105	110	117	123	131
	18	98	108	113	121	127	135
	19	100	111	116	124	131	139
	20	103	114	119	128	135	144
	21	106	117	123	131	139	148
	22	108	120	126	135	143	152
	23	111	123	129	139	147	156
	24	113	126	132	142	151	161
	25	116	129	136	146	155	165
12	12	98	105	109	115	120	127
	13	101	109	113	119	125	131
	14	103	112	116	123	129	136
	15	106	115	120	127	133	141
	16	109	119	124	131	138	145
	17	112	122	127	135	142	150
	18	115	125	131	139	146	155
	19	118	129	134	143	150	159
	20	120	132	138	147	155	164
	21	123	136	142	151	159	169
	22	126	139	145	155	163	173
	23	129	142	149	159	168	178
	24	132	146	153	163	172	183
	25	135	149	156	167	176	187

m	n	q					
		0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10
13	13	117	125	130	136	142	149
	14	120	129	134	141	147	154
	15	123	133	138	145	152	159
	16	126	136	142	150	156	165
	17	129	140	146	154	161	170
	18	133	144	150	158	166	175
	19	136	148	154	163	171	180
	20	139	151	158	167	175	185
	21	142	155	162	171	180	190
	22	145	159	166	176	185	195
	23	149	163	170	180	189	200
	24	152	166	174	185	194	205
	25	156	170	178	189	199	211
14	14	137	147	152	160	166	174
	15	141	151	156	164	171	179
	16	144	155	161	169	176	185
	17	148	159	165	174	182	190
	18	151	163	170	179	187	196
	19	155	168	174	183	192	202
	20	159	172	178	188	197	207
	21	162	176	183	193	202	213
	22	166	180	187	198	207	218
	23	169	184	192	203	212	224
	24	173	188	196	207	218	229
	25	177	192	200	212	223	235
15	15	160	171	176	184	192	200
	16	163	175	181	190	197	206
	17	167	180	186	195	203	212
	18	171	184	190	200	208	218
	19	175	189	195	205	214	224
	20	179	193	200	210	220	230
	21	183	198	205	216	225	236
	22	187	202	210	221	231	242
	23	191	207	214	226	236	248
	24	195	211	219	231	242	254
	25	199	216	224	237	248	260
16	16	184	296	202	211	219	229
	17	188	201	207	217	225	235
	18	192	206	212	222	231	242
	19	196	210	218	228	237	248
	20	201	215	223	234	243	255
	21	205	220	228	239	249	261
	22	209	225	233	245	255	267
	23	214	230	238	251	261	274
	24	218	235	244	256	267	280
	25	222	240	249	262	273	287

m	n	q					
		0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10
17	17	210	223	230	240	249	259
	18	214	228	235	246	255	266
	19	219	234	241	252	262	273
	20	223	239	246	258	268	280
	21	228	244	252	264	274	287
	22	233	249	258	270	281	294
	23	238	255	263	276	287	300
	24	242	260	269	282	294	307
	25	247	265	275	288	300	314
18	18	237	252	259	270	280	291
	19	242	258	265	277	287	299
	20	247	263	271	283	294	306
	21	252	269	277	290	301	313
	22	257	275	283	296	307	321
	23	262	280	289	303	314	328
	24	267	286	295	309	321	335
	25	273	292	301	316	328	343
19	19	267	283	291	303	313	325
	20	272	289	297	309	320	333
	21	277	295	303	316	328	341
	22	283	301	310	323	335	349
	23	288	307	316	330	342	357
	24	294	313	323	337	350	364
	25	299	319	329	344	357	372
20	20	298	315	324	337	348	361
	21	304	322	331	344	356	370
	22	309	328	337	351	364	378
	23	315	335	344	359	371	386
	24	321	341	351	366	379	394
	25	327	348	358	373	387	403
21	21	331	349	359	373	385	399
	22	337	356	366	381	393	408
	23	343	363	373	388	401	417
	24	349	370	381	396	410	425
	25	356	377	388	404	418	434
22	22	365	386	396	411	424	439
	23	372	393	403	419	432	448
	24	379	400	411	427	441	457
	25	385	408	419	435	450	467
23	23	402	424	434	451	465	481
	24	409	431	443	459	474	491
	25	416	439	451	468	483	500
24	24	440	464	475	492	507	525
	25	448	472	484	501	517	535
25	25	480	505	517	536	552	570

ЛИТЕРАТУРА

1. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. М., Стандартгиз, 1949. 477 с.
2. **Бурдун Г. Д., Марков Б. М.** Основы метрологии. М., Изд-во стандартов, 1972. 318 с.
3. **Видуев М. Г., Кондра Г. С.** Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М., «Недра», 1969. 320 с.
4. **Долинский Е. Ф.** Обработка результатов измерений. М., Изд-во стандартов, 1973. 192 с.
5. **Зайдель А. Н.** Элементарные оценки ошибок измерений. Л., «Наука», 1968. 88 с.
6. **Крамер Г.** Математические методы статистики. Пер. с англ. Изд-во иностр. лит., 1948. 631 с.
7. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962. 350 с.
8. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968. 548 с.
9. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 192 с.
10. **Уилкс С.** Математическая статистика. М., «Наука», 1967. 632 с.
11. **Хальд А.** Математическая статистика с техническими приложениями. Изд-во иностр. лит., 1956. 664 с.
12. **Смирнов Н. В., Дунин — Барковский И. В.** Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений. М., «Наука», 1965. 512 с.
13. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — «Труды метрологических институтов СССР», вып. 134/194/, Изд-во стандартов, 1972, с. 5—90.
14. **Линник Ю. В.** Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966. 252 с.
15. **Пагурова В. И.** Критерий сравнения средних значений по двум нормальным выборкам. — В кн: Сообщения по вычислительной математике. М., ВЦ АН СССР, вып. 5, 1968.
16. **Welch B. L.** The generalization of Students problem when several different population variances are involved. — «Biometrika», 1947, № 34, v. 1, pp. 28—35.
17. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г.** Погрешности результата измерения и их запись. — «Метрология», 1972, № 3, с. 24—31.
18. **Грачев И. А., Рабинович С. Г.** Приближенный способ построения функции распределения композиции распределений. — «Измерительная техника», 1968, № 1, с. 8—11.
19. **Кудряшова Ж. Ф.** Анализ методики расчета результирующей погрешности приборов. — «Измерительная техника», 1971, № 1, с. 72—75.
20. **Рабинович Б. Е.** Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений. — «Труды институтов комитета», вып. 57/117/, Изд-во стандартов, 1962, с. 19—33.
21. **Рабинович С. Г.** Методика вычисления погрешности результата измерения. — «Метрология», 1970, № 1, с. 3—12.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 53.087: 517

Ж. Ф. КУДРЯШОВА, С. Г. РАБИНОВИЧ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЦ КОМПОЗИЦИИ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

При расчете погрешностей результатов измерений возникает необходимость выбора способа сложения составляющих. Алгебраическое суммирование предельных погрешностей дает, как известно, завышенную погрешность. Квадратическое суммирование слагаемых, наоборот, приводит к преуменьшению погрешности [1].

Строгое решение задачи может быть получено вероятностно-статистическими методами при точно заданных функциях распределения слагаемых погрешности. Принято считать, что некоторые погрешности, входящие в погрешность результата измерения, распределены равномерно [2—5]. Поэтому представляет интерес вопрос о нахождении композиции нескольких равномерных распределений.

В [3] для расчета доверительных границ суммы равномерно распределенных погрешностей предложена формула

$$\theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2}, \tag{1}$$

где θ — доверительная граница суммарной погрешности;
θ_i — граница i-й равномерно распределенной составляющей погрешности;
k — коэффициент, соответствующий выбранной доверительной вероятности.

Формула (1) построена на основе композиции равномерных распределений с одинаковой плотностью. В данной работе предусматривается нахождение коэффициентов k для композиции равномерных распределений разной плотности. В практических задачах чаще всего слагаемые отличаются друг от друга, и поэтому эта работа представляет интерес.

Допустим, случайная величина ξ равномерно распределена на конечном интервале $(b-h,\ b+h)$ и равна нулю вне этого интервала. С помощью линейного преобразования интервал, на котором равномерно распределена величина ξ, может быть приведен к любому заданному. Для простоты расчетов представим, что случайная величина распределена на интервале (0, 1). Соответствующая плотность распределения имеет вид

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ в интервале } (0,1), \\ 0 \text{ вне интервала } (0,1). \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим плотность распределения композиции n равномерно распределенных величин на интервале (0, 1), которая займет интервал $(0, n)$, через $f_n(x)$. Если к n равномерно распределенным величинам прибавить еще одну случайную величину, также равномерно распределенную на интервале (0, 1), то новая случайная величина будет иметь плотность распределения, описываемую выражением [5]:

$$f_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} f_n(t)\,dt. \tag{3}$$

Если же к n равномерно распределенным случайным величинам прибавляется случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, a)$, то $f_{n+1}(x)$ имеет вид:

$$f_{n+1}(x) = \int_{x-a}^{x} \frac{1}{a} f_n(t)\,dt. \tag{4}$$

Основываясь на формуле (4), можно построить композицию распределений любого числа случайных величин, равномерно распределенных в разных интервалах. Найденная при этом плотность распределения позволяет вычислить границу θ для различных доверительных вероятностей, а следовательно, и коэффициент k в формуле (1).

Ниже в таблице представлены значения коэффициентов k для разных доверительных вероятностей α и отношений c длины интервалов, на которых равномерно распределены составляющие погрешности. Число слагаемых $l = 2$, 3 и 4. При нахождении функции распределения трех и четырех равномерно распределенных погрешностей предполагалось, что интервал одной из них в c раз превосходит интервал, на котором равномерно распределена каждая из остальных погрешностей.

Значения коэффициента k

c	$\alpha = 0,90$			$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,98$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	0,967	0,958	0,946	1,101	1,120	1,120	1,218	1,283	1,301
2	0,942	0,945	0,945	1,054	1,086	1,096	1,161	1,230	1,263
3	0,918	0,926	0,935	1,019	1,046	1,062	1,108	1,167	1,200
4	0,906	0,912	0,918	0,996	1,017	1,032	1,070	1,121	1,151
5	0,900	0,905	0,911	0,982	0,997	1,012	1,054	1,089	1,118

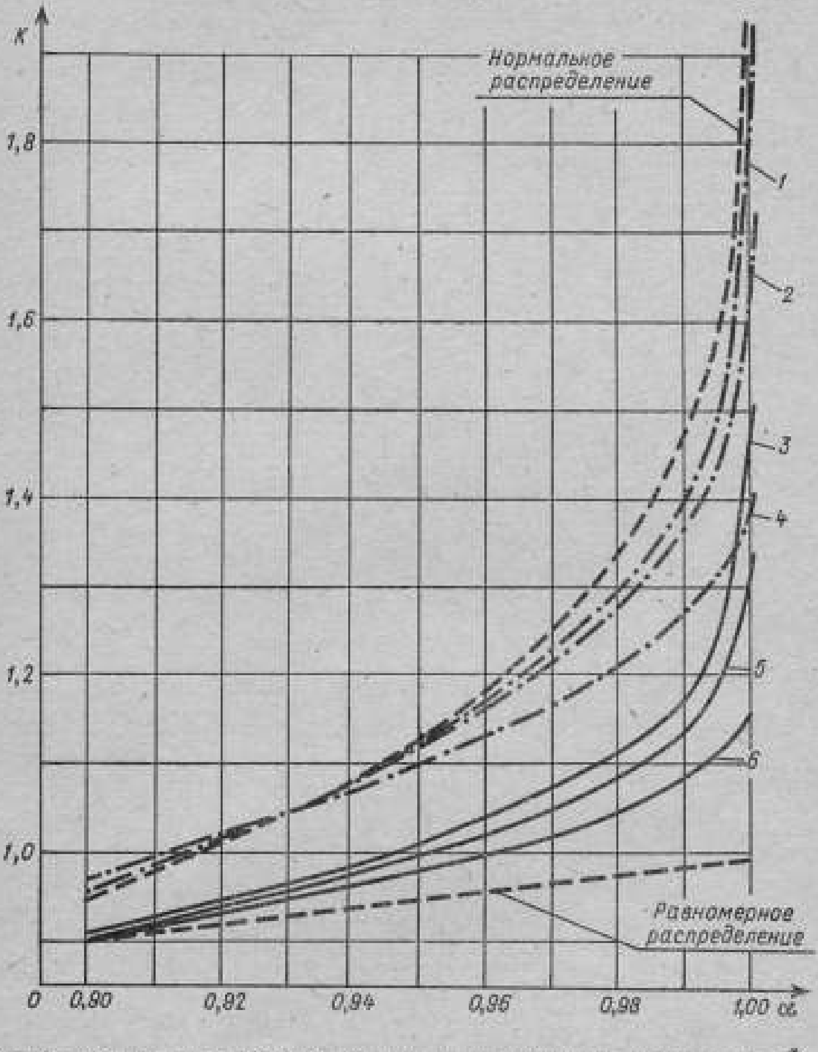
c	$\alpha = 0,99$			$\alpha = 1$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	1,276	1,376	1,410	1,414	1,732	2,000
2	1,215	1,313	1,360	1,342	1,633	1,890
3	1,157	1,283	1,284	1,265	1,507	1,732
4	1,116	1,182	1,223	1,213	1,414	1,606
5	1,089	1,143	1,179	1,170	1,347	1,512

В пределе, при сложении большого числа одинаковых слагаемых получим нормальное распределение и $k = \frac{z_q}{\sqrt{3}}$, где Z_q — квантиль нормального распределения. Подсчеты дают $k_{0,90} = 0,95$; $k_{0,95} = 1,13$; $k_{0,98} = 1,35$; $k_{0,99} = 1,49$.

На рисунке представлен график изменения коэффициентов k в зависимости от доверительной вероятности α и числа m складываемых погрешностей, распределенных равномерно. На графике $1 - m = 4$, $c = 1$; $2 - m = 3$, $c = 1$; $3 - m = 2$, $c = 1$; $4 - m = 4$, $c = 5$; $5 - m = 3$, $c = 5$; $6 - m = 2$, $c = 5$.

Из графика и таблицы видно, что значение коэффициента заключено в пределах $\frac{z_q}{\sqrt{3}}$, r_q, где r_q — квантиль равномерного распределения.

Для доверительных вероятностей $\alpha = 0,90$ и $\alpha = 0,95$ можно рекомендовать усредненные значения коэффициентов, применение которых при любых значениях ε вызывает погрешность, не превышающую 7%. Таковыми являются коэффициенты, приведенные в [3], использование которых несколько завышает рассчитываемую погрешность. Для более высоких доверительных вероятностей ($\alpha \geqslant 0{,}95$) целесообразно пользоваться коэффициентами k, указанными в таблице. Замена же коэффициента квантилями $\frac{z_q}{\sqrt{3}}$ и r_q ведет к погрешностям порядка 40—50%, что недопустимо.



Доверительная вероятность при определении k должна согласовываться с вероятностью, принятой при вычислении доверительных границ случайной погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородачев Н. А.** Анализ качества и точность производства. М., Машгиз, 1946. 156 с.

2. **Рабинович Б. Е.** Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений. — «Труды институтов комитета», вып. 57/117/, Изд-во стандартов, 1962, с. 19—33.

3. **Рабинович С. Г.** Методика вычисления погрешности результата измерения. — «Метрология», 1970, № 1, с. 3—12.

4. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — «Труды метрологических институтов СССР», вып. 134/194/, Изд-во стандартов, 1972, с. 5—90.

5. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948. 631 с.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

УДК 53.087: 517

Ж. Ф. КУДРЯШОВА, Т. Н. СИРАЯ

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для статистической обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях предложены следующие методы:* 1) метод линеаризации, 2) метод приведения и 3) метод перебора.

В настоящей статье рассматривается случай, когда измеряемая величина может быть представлена в виде произведения функций отдельных измеряемых аргументов. В этом случае статистическая обработка результатов наблюдений методом перебора значительно упрощается, а также возможно приближенное построение доверительных интервалов для истинного значения измеряемой величины.

В общем случае функциональная зависимость измеряемой величины от измеряемых аргументов A_1, A_2 (для простоты изложения берем два аргумента) имеет вид

$$A = f(A_1, A_2). \tag{1}$$

Пусть в результате измерения аргументов получены группы результатов наблюдений

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1m} \text{ и } X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n},$$

где $X_{11}, \ldots, X_{1m}, X_{21}, \ldots, X_{2n}$ — независимые случайные величины

$X_{11}, \ldots, X_{1m}$ — одинаково распределены,

$M[X_{1i}] = A_1$,

$X_{21}, \ldots, X_{2n}$ — одинаково распределены,

$M[X_{2j}] = A_2$,

$1 < i < m, \ 1 < j < n.$

Для нахождения оценки измеряемой величины A применим метод перебора (см. стр. 16). Рассмотрим $y_{ij} = f(X_{1i}, X_{2j})$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $1 < j \leqslant n$.

Если $i \neq k$ и $j \neq l$, то случайные величины y_{ij} и y_{kl} независимы; однако y_{ij} и y_{il} (соответственно y_{ij} и y_{kj}) — зависимые случайные величины.

Согласно методу перебора для задач первого типа, в качестве оценки A берем

$$\tilde{A} = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}; \tag{2}$$

при этом $M[\tilde{A}] = A$.

Положим, что $f(X_1, X_2)$ можно представить в виде

$$f(X_1, X_2) = f_1(X_1) \cdot f_2(X_2). \tag{3}$$

В этом случае оценка $\tilde{A}$, получаемая методом перебора, для задач первого типа принимает более простой вид:

$$\tilde{A} = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_1(x_{1i}) \cdot f_2(x_{2j}) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_1(X_{1i}) \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_2(X_{2j}) = \widetilde{f_1(X_1)} \cdot \widetilde{f_2(X_2)}, \tag{4}$$

где $\widetilde{f_l(X_l)}$ — оценка для $B_l = M[f_l(X_l)]$ (величины, зависящей от l-го измеряемого аргумента).

---

* Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович. «Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях», стр. 13-18 в настоящем сборнике.

Оценка вида $\bar{A} = f_1(\bar{X}_1)\, f_2(\bar{X}_2)$ в данном случае весьма естественна, так как согласно свойству математического ожидания [1]

$$A = M[f(X_1, X_2)] = M[f_1(X_1)\cdot f_2(X_2)] = M[f_1(X_1)]\cdot M[f_2(X_2)]$$

Дисперсия случайной величины $Y = f_1(X_1)\, f_2(X_2)$ равна

$$D[Y] = M[Y^2] - [M[Y]]^2 = M\left[Y_1^2 \cdot Y_2^2\right] - [M[Y_1 Y_2]]^2. \qquad (5)$$

Используя свойство математического ожидания независимых случайных величин, получаем:

$$D[Y] = M\left[Y_1^2\right]\cdot M\left[Y_2^2\right] - [M[Y_1]]^2 \cdot [M[Y_2]]^2.$$

Воспользовавшись равенством $M[y^2] = D[y] + [M[y]]^2$ имеем

$$D[y] = [D[y_1] + [M[y_1]]^2]\,[D[y_2] + [M[y_2]]^2] - [M[y_1]]^2\cdot[M[y_2]]^2.$$

Аналогичное равенство можно написать для дисперсии оценки $\bar{A} = \bar{B}_1\bar{B}_2$:

$$D[\bar{A}] = [D[\bar{B}_1] + [M[\bar{B}_1]]^2]\cdot[D[\bar{B}_2] + [M[\bar{B}_2]]^2] - [M[\bar{B}_1]]^2\cdot[M[\bar{B}_2]]^2. \qquad (6)$$

Это дает возможность найти оценку $S^2_{\bar{A}}$ дисперсии $\bar{A}$, подставив в равенство (6) оценки $\bar{B}_i$ и оценки S_i^2 дисперсий $D\left[\bar{B}_i\right]$ этих величин:

$$S^2_{\bar{A}} = \left[S_1^2 + \bar{B}_1^2\right]\left[S_2^2 + \bar{B}_2^2\right] - \bar{B}_1^2\cdot\bar{B}_2^2.$$

Аналогично для k сомножителей имеем

$$S^2_{\bar{A}} = \prod_{i=1}^{k}\left[S_i^2 + \bar{B}_i^2\right] - \prod_{i=1}^{k}\bar{B}_i^2. \qquad (7)$$

Например, для произведения трех случайных величин

$$S^2_{\bar{A}} = S_1^2S_2^2S_3^2 + \bar{B}_1^2S_2^2S_3^2 + \bar{B}_2^2S_1^2S_3^2 + \bar{B}_3^2S_1^2S_2^2 + \\ + \bar{B}_1^2\bar{B}_2^2S_3^2 + S_1^2\bar{B}_2^2\bar{B}_3^2 + \bar{B}_1^2\bar{B}_3^2S_2^2. \qquad (8)$$

В практических задачах члены равенства (8), содержащие произведения S_i^2, часто на порядок меньше остальных членов, и поэтому $S^2_{\bar{A}}$ можно вычислять по приближенной формуле

$$S^2_{\bar{A}} = S_1^2\bar{B}_2^2\bar{B}_3^2 + \bar{B}_1^2\bar{B}_2^2S_3^2 + \bar{B}_1^2\bar{B}_3^2S_2^2. \qquad (9)$$

Рассмотрим метод построения приближенного доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины $A = B_1B_2$. Предположим, что погрешности результатов наблюдений аргументов распределены нормально, тогда, используя распределение Стьюдента, можно построить доверительные интервалы для A_1 и A_2. Это дает возможность построить доверительные интервалы для $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ [2] с заданными доверительными вероятностями α_1 и α_2:

$$P[l_1 \leqslant B_1 \leqslant L_1] = \alpha_1,$$
$$P[l_2 \leqslant B_2 \leqslant L_2] = \alpha_2.$$

Случайные величины $Y_1 = f_1(X_1)$ и $Y_2 = f_2(X_2)$ независимы, поэтому независимы и события:

$$\{l_1 < B_1 < L_1\} \text{ и } \{l_2 < B_2 < L_2\}.$$

Следовательно, легко найти вероятность попадания точки (B_1, B_2) в прямоугольник $M = (l_1, L_1; l_2, L_2)$:

$$P[(B_1, B_2) \in M] = P[l_1 < B_1 < L_1,\ l_2 < B_2 < L_2] =$$
$$= P[l_1 < B_1 < L_1] \cdot P[l_2 < B_2 < L_2] = \alpha_1 \alpha_2.$$

При построении доверительного интервала (d, D) для $A = B_1 B_2$ представляет трудность нахождение доверительной вероятности

$$P[d < B_1 B_2 < D].$$

Множество точек (B_1, B_2), которые удовлетворяют условию: $d < B_1 B_2 < D$ (при данных d и D, $0 < d < D$), образуют гиперболическую полосу на плоскости, ограниченную гиперболами: $B_1' B_2' = d$ и $B_1'' B_2'' = D$, как показано на рис. 1.

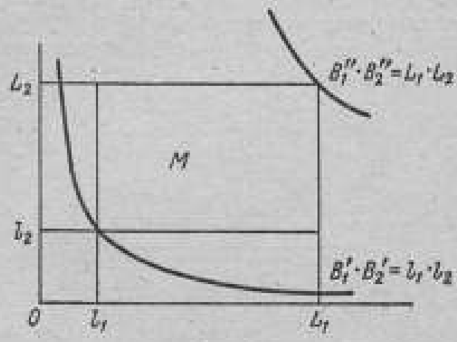


Рис. 1.

В практических задачах измерений, как правило, для B_1 и B_2 получают доверительные интервалы, не содержащие 0, поэтому далее считаем $0 < l < L$. Если

$$0 < l_1 < L_1 \quad 0 < l_2 < L_2,$$

то

$$P[l_1 < B_1 < L_1,\ l_2 < B_2 < L_2] < P \times [l_1 l_2 < B_1 B_2 < L_1 L_2]$$

(так как прямоугольник M лежит внутри гиперболической полосы). Однако при переходе от гиперболической полосы к прямоугольнику M допускается значительная погрешность, т. е. довольно велика разность вероятностей

$$P[l_1 l_2 < B_1 B_2 < L_1 L_2] - P[l_1 < B_1 < L_1,\ l_2 < B_2 < L_2].$$

Поэтому попробуем аппроксимировать гиперболическую полосу многоугольником, лежащим внутри этой полосы, чтобы вероятность попадания в полосу вне его была бы мала.

Для этого построим более широкие доверительные интервалы (l_1', L_1') для B_1 и (l_1', L_2') для B_2, которым отвечают доверительные вероятности α_1' и α_2', причем $\alpha_1' > \alpha_1$, $\alpha_2' > \alpha_2$ (рис. 2, *а*).

Им соответствует прямоугольник $M' = (l_1', L_1'; l_2', L_2')$, содержащий прямоугольник M; вероятность попадания (B_1, B_2) в M' равна

$$P[(B_1, B_2) \in M'] = \alpha_1' \alpha_2'.$$

Из рис. 2, *а* видно, что погрешность аппроксимации гиперболической полосы прямоугольником M' обусловлена, главным образом, угловыми треугольниками Δ_1 и Δ_2. Поэтому рассмотрим шестиугольник N, полученный из M' отбрасыванием этих треугольников (рис. 2, *б*).

Вероятность попадания (B_1, B_2) в шестиугольник N равна

$$\alpha_0 = P[(B_1, B_2) \in N] = P[(B_1, B_2) \in M'] -$$
$$- P[(B_1, B_2) \in \Delta_1 \cup \Delta_2] \approx \alpha_1' \alpha_2' - \frac{(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_2' - \alpha_2)}{4}. \qquad (10)$$

Многоугольник N дает приближение для гиперболической полосы

$$\{d < B_1 B_2 < D\},$$

в которую он вписывается, т. е.

$$d = \min\left(l_1' \cdot l_2,\ l_1 \cdot l_2'\right),\ D = \max\left(L_1' L_2,\ L_1 L_2'\right). \tag{11}$$

При этом

$$\alpha = P\,[d < B_1 B_2 < D] > \alpha_0 = P\,[(B_1,\ B_2) \in N] \approx$$

$$\approx \alpha_1' \alpha_2' - \frac{1}{4}\left(\alpha_1' - \alpha_1\right)\left(\alpha_2' - \alpha_2\right).$$

Если построить прямоугольник $M'' = \left(l_1'',\ L_1'';\ l_2'',\ L_2''\right)$, соответствующий такой же доверительной вероятности, что и многоугольник N, т. е.

$$P\,[(B_1,\ B_2) \in M''] = P\,[(B_1,\ B_2) \in N],$$

то доверительный интервал для $B_1\ B_2$ будет шире, так как многоугольник дает лучшее приближение для гиперболической полосы, чем прямоугольник.

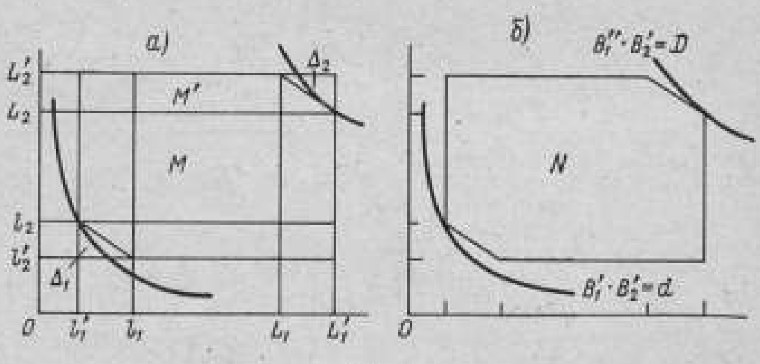


Рис. 2.

При построении доверительных интервалов обычно задаются доверительными уровнями $\alpha = 0{,}95;\ 0{,}98;\ 0{,}99$. Поэтому меньший прямоугольник M выбираем так, чтобы (см. формулу (10))

$$\frac{1}{4}\left(\alpha_1' - \alpha_1\right)\left(\alpha_2' - \alpha_2\right) < 0{,}025.$$

Можно взять $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}7$ (в этом случае вероятность попадания точки в отбрасываемые треугольники Δ_1 или Δ_2 не превышает

$$\frac{1}{4}(1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}7) < 0{,}025).$$

В табл. 1 приведены доверительные вероятности α_0 попадания $(B_1,\ B_2)$ в многоугольник N. Прямоугольник M построен для $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}70$; тогда вероятность попадания $(B_1,\ B_2)$ в M равна $\alpha_1 \alpha_2 = 0{,}70 \cdot 0{,}70 = 0{,}49$. Прямоугольник M' получен путем построения доверительных интервалов для B_1 и B_2 при $\alpha_1' > 0{,}90$, $\alpha_2' > 0{,}90$.

Метод построения доверительного интервала для $A = B_1 B_2$ можно распространить на большее число сомножителей.

В случае трех сомножителей $A = B_1 B_2 B_3$ множество точек (B_1, B_2, B_3), где выполняется условие $d < B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 < D$ заключено между поверхностями $B_1' \cdot B_2' \cdot B_3' = d$ и $B_1'' \cdot B_2'' \cdot B_3' = D$. Эту доверительную область можно аппроксимировать многогранником. Для этого построим параллелепипеды, ребрами которых служат доверительные интервалы для B_1, B_2, B_3. Основной параллелепипед M получим, построив доверительные интервалы (l_1, L_1), (l_2, L_2), (l_3, L_3) с $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0{,}7$, больший параллелепипед M' — построив интервалы с α_1', α_2', $\alpha_3' > 0{,}9$. Многогранник N получаем, отрезая от большего параллелепипеда M' две угловые треугольные пирамиды (аналогичные треугольникам Δ_1 и Δ_2 для случая двух аргументов).

Таблица 1

α_1'	α_2': 0,90	0,95	0,98	0,99
	$\alpha_0 = \alpha_0(\alpha_1', \alpha_2')$			
0,90	0,800	0,843	0,868	0,877
0,95	0,843	0,887	0,913	0,968
0,98	0,868	0,913	0,941	0,954
0,99	0,877	0,968	0,954	0,959

Вероятность попадания (B_1, B_2, B_3) в многогранник N равна

$$\alpha_0 = P[(B_1, B_2, B_3) \in N] \approx \alpha_1'\alpha_2'\alpha_3' - \frac{(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_2' - \alpha_2)(\alpha_3' - \alpha_3)}{8}.$$

Границы доверительного интервала (d, D) для $A = B_1 B_2 B_3$ будут

$$d = \min\left(l_1' l_2 l_3,\ l_1 l_2' l_3,\ l_1 l_2 l_3'\right),$$

$$D = \max\left(L_1' L_2 L_3,\ L_1 L_2' L_3,\ L_1 L_2 L_3'\right),$$

доверительная вероятность

$$\alpha = P[d < B_1 B_2 B_3 < D] > \alpha_0 = P[(B_1 B_2 B_3) \in N].$$

В табл. 2 даны вероятности α_0 при $\alpha_3' = 0{,}99$ в зависимости от α_1' и α_2'.

Можно построить таблицы, подобные табл. 2, для $\alpha_3' = 0{,}90,\ 0{,}95,\ 0{,}98$.

При числе сомножителей $n > 3$ построение доверительных интервалов аналогично; вероятность попадания $(B_1, \ldots, B_n)$ в соответствующую многомерную область N находится в формуле

$$\alpha_0 \approx \alpha_1' \ldots \alpha_n' - \frac{1}{2^n}(\alpha_1' - \alpha_1) \ldots (\alpha_n' - \alpha_n).$$

Методику построения доверительного интервала для произведения величин проиллюстрируем на примере измерения плотности твердого тела. Измерив массу m и объем V тела, плотность ρ находят по формуле $\rho = \frac{m}{V}$; величину ρ можно представить в виде произведения:

$$\rho = m \cdot \frac{1}{V}.$$

Результаты наблюдений m и V после статистической обработки можно представить в следующем виде:

$$\bar{m} = 252,9120 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, \quad \bar{V} = 195,3798 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$S^2_{\bar{m}} = 213,2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}^2, \quad S^2_{\bar{V}} = 180,0 \cdot 10^{-20} \text{ м}^6$$

Число наблюдений при измерении массы и объема $n = 11$. Полагая, что погрешности результатов наблюдений массы и объема имеют нормальное распределение, можно построить доверительные интервалы для истинных значений m и V.

Таблица 2

α_1'	α_2' 0,90	0,95	0,98	0,99
	$\alpha_0 = \alpha_0(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$			
0,90	0,860	0,845	0,871	0,880
0,95	0,845	0,891	0,913	0,921
0,98	0,871	0,913	0,948	0,940
0,99	0,880	0,921	0,940	0,967

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,70$ доверительные интервалы будут:

для m:

$$[l_1, L_1] = (252,9104 \cdot 10^{-3}; 252,9136 \cdot 10^{-3}];$$

для V:

$$[195,378336 \cdot 10^{-6}; 195,381264 \cdot 10^{-6}];$$

и, следовательно,

для $\frac{1}{V}$:

$$[l_2 L_2] = \left[\frac{1}{195,381264} \cdot 10^6; \frac{1}{195,378336} \cdot 10^6\right],$$

Аппроксимируем доверительную область, в которую попадает точка $\left(m, \frac{1}{V}\right)$, многоугольником N, изображенным на рис. 2, *б*. При $\alpha_1' = \alpha_2' = 0,98$ доверительные интервалы равны

для m:

$$[l_1', L_1'] = [252,90796 \cdot 10^{-3}; 252,91604 \cdot 10^{-3}],$$

для V:

$$[195,37609 \cdot 10^{-6}; 195,38350 \cdot 10^{-6}],$$

для $\frac{1}{V}$:

$$[l_2', L_2'] = \left[\frac{1}{195,38350} \cdot 10^6, \frac{1}{195,37609} \cdot 10^6\right].$$

Для выбора верхней границы D доверительного интервала для ρ вычисляем, согласно формулам (11):

$$\rho_1 = L_1' \cdot L_2 = 1,294496 \cdot 10^3,$$

$$\rho_2 = L_1 L_2' = 1,294494 \cdot 10^3,$$

и берем большее: $D = 1,294496 \cdot 10^3$.

Для выбора нижней границы d вычисляем

$$\rho_3 = l_1' \cdot l_2 = 1{,}294433 \cdot 10^3, \quad \rho_4 = l_1 \cdot l_2' = 1{,}294431 \cdot 10^3$$

и берем меньшее: $d = 1{,}294431 \cdot 10^3$.

Таким образом, доверительный интервал для ρ

$$[d,\ D] = [1{,}294431 \cdot 10^3,\ 1{,}294496 \cdot 10^3].$$

По табл. 1 находим, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}70$; $\alpha_1' = \alpha_2 = 0{,}98$ доверительному интервалу $(d,\ D)$ соответствует вероятность

$$\alpha = P\,[d < \rho < D] > \alpha_0 = P\left[\left(m,\ \frac{1}{V}\right) \in N\right] \approx 0{,}94.$$

Сравним полученные доверительные границы с теми, которые получились бы, если гиперболическую полосу аппроксимировать не многоугольником, а прямоугольником M_0 (рис. 1), с той же самой вероятностью α_0:

$$P\left[\left(m,\ \frac{1}{V}\right) \in M_0\right] = P\left[\left(m,\ \frac{1}{V}\right) \in N\right] = \alpha_0.$$

Соответствующие доверительные интервалы для измеряемых аргументов $m,\ \frac{1}{V}$ можно строить при $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{0{,}94} = 0{,}97$.

При $n = 11$, $\alpha = 0{,}97$, используя распределение Стьюдента, получим доверительные интервалы

для m:

$$[l_1,\ L_1] = [252{,}90823 \cdot 10^{-3};\ 252{,}91577 \cdot 10^{-3}].$$

для $\frac{1}{V}$:

$$[l_2,\ L_2] = \left[\frac{1}{195{,}3832} \cdot 10^6,\ \frac{1}{195{,}3763} \cdot 10^6\right].$$

Тогда границы доверительного интервала для $\rho = m \cdot \frac{1}{V}$ будут:

$$d' = l_1 l_2 = 1{,}294422 \cdot 10^3, \quad D' = L_1 L_2 = 1{,}294506 \cdot 10^3.$$

Длина этого интервала:

$$D' - d' = (1{,}294506 - 1{,}294422) \cdot 10^3 = 0{,}084.$$

Для той же доверительной вероятности $\alpha_0 = 0{,}94$ длина доверительного интервала для ρ, построенного предлагаемым методом, равна

$$D - d = (1{,}294496 \cdot 10^3 - 1{,}294431) \cdot 10^3 = 0{,}065.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Крамер Г.** Математические методы статистики, Изд-во иностр. лит., 1948. 631 с.

2. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968. 547 с.

Поступила в редакцию 15/IV—1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович. **Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях** 3

Принятые обозначения . . . . . —

1. Основные определения 4

2. Общие положения и классификация . . . . . —

3. Основные математические соотношении 6

   3.1. Основные математические соотношения при линейной зависимости между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами . . . . . —

   3.2. Основные математические соотношения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов 13

4. Результат измерения 18

   4.1. Результат измерения при линейной зависимости измеряемой величины от аргументов . . . . . —

   4.2. Результат измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов 19

5. Случайные погрешности результата измерения . . . . . —

   5.1. Оценки параметров случайной погрешности результата измерения при линейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов . . 20

   5.2. Оценки параметров случайной погрешности результата измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов —

   5.3. Вычисление доверительной случайной погрешности результата измерения при линейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов 22

   5.4. Вычисление доверительной случайной погрешности результата измерения при нелинейной зависимости измеряемой величины от измеряемых аргументов 23

6. Неисключенные систематические погрешности 24

7. Общая погрешность результата измерения 27

   7.1. Случайная и систематическая составляющие погрешности измерения . . —

   7.2. Доверительные границы общей погрешности результата измерения . . —

8. Формы представления результата измерения 28

9. Проверка гипотез при косвенных измерениях . . . . . —

   9.1. Выявление корреляционной связи между аргументами 29

   9.2. Допустимое расхождение двух результатов измерений одной измеряемой величины 30

   9.3. Допустимое расхождение двух результатов измерений одной величины при использовании метода приведения 31

   Примеры статистической обработки результатов наблюдений 32

   Вспомогательные статистические таблицы 41

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович. **Вычисление границ композиции равномерных распределений** 59

Ж. Ф. Кудряшова, Т. Н. Сирая. **Построение доверительных интервалов для произведения случайных величин** 63

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СБОРНИКЕ

УДК 53.087 : 519.2

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович

Методы обработки результатов наблюдений при измерениях. Труды метрологических институтов СССР, вып. 172 (232), 1974 г, с. 3-58.

Рассмотрены методы косвенных измерений при известной функциональной зависимости между измеряемой величиной A и измеряемыми независимыми аргументами $A_1, \ldots, A_m$:

$$A = f(A_1, \ldots, A_m). \qquad (1)$$

Предполагалось, что измеряемые аргументы подвергались многократным наблюдениям и результаты наблюдений представлены в виде группы данных.

Рассмотрены вопросы нахождения оценки измеряемой величины и ее погрешности в случае линейной и нелинейной зависимости (1). Для нелинейной зависимости применяется линеаризация функций путем разложения ее в ряд Тейлора. В случае невозможности линеаризации рекомендуется проводить измерения специальным образом, то есть измерения аргументов выполнить так, чтобы получаемые сочетания результатов наблюдений можно было подставлять в формулу (1) и всякий раз вычислять отдельное значение измеряемой величины.

Предложен также численный метод построения функции распределения отдельных значений измеряемой величины и нахождения оценки измеряемой величины и ее погрешности.

Особое внимание уделено расчету погрешностей результатов измерений. При этом предполагалось, что в погрешность результатов измерений входят как случайные погрешности, так и неисключенные систематические погрешности.

Указаны возможные случаи построения доверительных интервалов для истинного значения измеряемой величины A. Рассмотрены гипотезы о допустимости расхождения двух результатов измерений одной и той же измеряемой величины и об отсутствии корреляционной связи между аргументами. Предусмотрены две формы записи результата измерения. Табл. 10. Библ. 21.

УДК 53.087 : 517

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЦ КОМПОЗИЦИИ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович

Методы обработки результатов наблюдений при измерениях. Труды метрологических институтов СССР, вып. 172 (232), 1974 г, с. 58-62.

Путем построения композиции равномерных распределений разной плотности уточнены значения коэффициента k в аппроксимирующей формуле

$$\theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2},$$

где θ — доверительная суммарная погрешность;

θ_i — граница i-й равномерно распределенной составляющей погрешности;

k — коэффициент, соответствующий выбранной доверительной вероятности.

Полученные значения коэффициента k представлены в зависимости от доверительной вероятности, отношений длин интервалов, на которых равномерно распределены составляющие погрешности и числа слагаемых.

Показано, что при применении аппроксимирующей формулы для суммирования погрешностей при доверительной вероятности, большей 0,95, целесообразно пользоваться значениями коэффициентов, полученными в данной работе. Табл. 1. Ил. 1. Библ. 5.

УДК 53.087 : 517

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ж. Ф. Кудряшова, Т. Н. Сиран

Методы обработки результатов наблюдений при измерениях. Труды метрологических институтов СССР, вып. 172 (232), 1975, с. 63-70

Дана методика обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях, когда измеряемая величина может быть представлена в виде произведения функций отдельных измеряемых аргументов.

Предложен метод построения приближенного доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины $A = \prod_{i=1}^{m} B_i$, где $B_i = f_i(A_i)$ — функция i-го измеряемого аргумента.

Приведенная методика построения доверительного интервала проиллюстрирована на примере. Табл. 3. Ил. 2. Библ. 2.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 172 (232)

Редактор *Г. А. Митарчук*
Техн. редактор *Е. А. Хмелинская*. Корректор *С. В. Новенко*

Сдано в набор 20/XI 1974 г. Подписано к печати 12/III 1975 г. М-23666. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 1. Печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 7. Тираж 2000 экз. Заказ № 2578.
Цена 70 коп.

Ленинградское отделение издательства «Энергия». 192041, Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 196126, Ленинград, Ф-126, Социалистическая ул., 14.

Цена 70 коп.