

КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР  
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ  
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

ВЫПУСК 60 (120)

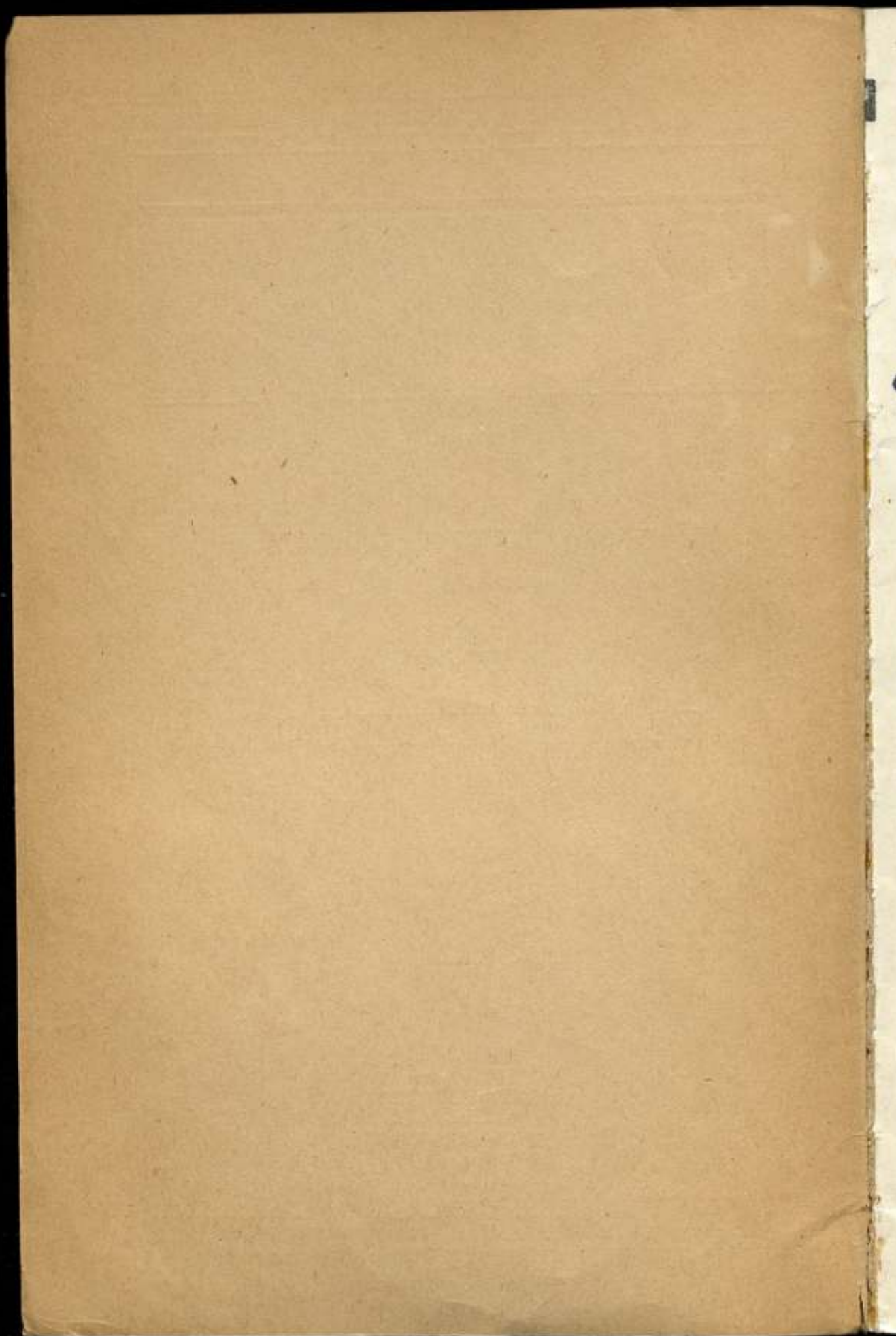
**ОБЗОР  
ТЕОРИЙ ТВЕРДОСТИ**

СТАНДАРТГИЗ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

1962

60 (120)



КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ, МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
при СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СОЮЗА ССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ТРУДЫ ИНСТИТУТОВ КОМИТЕТА

ВЫПУСК 60 (120)

ОБЗОР  
ТЕОРИЙ ТВЕРДОСТИ

*Составил канд. техн. наук*

*Б. И. ПИЛИПЧУК*

*Под редакцией*

*канд. техн. наук. Е. Ф. ДОЛИНСКОГО*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ  
СТАНДАРТИЗ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

1962

м 12 733 2

Обзор посвящен изложению наиболее развитых теорий измерения твердости металлов статическими и динамическими методами и предназначен для работников исследовательских и заводских лабораторий, интересующихся теоретическими вопросами определения твердости металлов.

Ответственный редактор  
д-р техн. наук проф. В. О. АРУТЮНОВ

2  
584

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Твердость занимает совершенно особое место среди понятий физики и механики материалов.

С одной стороны, измерения твердости являются общепризнанным удобным скоростным средством контроля качества изделий без их разрушения и в настоящее время приобретают все возрастающее значение для промышленности, в особенности для технологии.

С другой стороны, до сих пор нет строгого научного определения самого понятия «твердость», и насколько нам известно, и в мировой литературе почти нет книг, посвященных теоретическим основам измерения твердости. Отдельные теоретические вопросы рассматриваются в статьях, разрозненных в многочисленных специальных журналах, мало доступных для рядового читателя.

Настоящая работа, содержащая обзор наиболее развитых теорий твердости, является попыткой в посильной мере восполнить указанный пробел в литературе.

Изложение не везде следует тексту оригинальных статей. При сохранении общего хода рассуждений и конечных результатов выводы упрощались или вводились небольшие обобщения в тех случаях, когда это позволяло достичь более стройного изложения. Можно надеяться, что такое изложение повышает ценность работы для тех читателей, которые интересуются больше конечными результатами теории, чем подробностями ее исторического развития.

Первая глава — «Общие сведения» — содержит анализ понятия твердости, классификацию существующих методов измерения, а также результаты решения контактной задачи в теории упругости и задачи вдавливания в теории пластичности. Во второй главе — «Статические методы измерения твердости» — рассматриваются методы измерения твердости по Бринеллю, Мейеру, Лудвику, Виккерсу и Роквеллу, в третьей главе — «Динамические методы измерения твердости» — рассматриваются методы ударного отпечатка и упругого отскакивания.

Данный обзор служит естественным дополнением к ранее изданной книге автора «Современное состояние техники определения твердости металлов» (Серия обзорных монографий по измерительной технике, вып. 13, Стандартгиз, 1960) и предназначается для инженеров и научных работников, интересующихся теоретическим обоснованием привычных операций определения твердости металлов статическими и динамическими методами.

Автор

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A_k$  — размерная постоянная в законе вдавливания конуса:  $F = A_k d^2 \cos^{\alpha-2} \beta$ .  
 $A_n$  — размерная постоянная в законе вдавливания квадратной пирамиды:  
 $F = A_n d^2 \cos^{\alpha-2} \beta$ .  
 $A$  — размерная постоянная в законе вдавливания шарика («законе Мейера»),  
 не зависящая от диаметра шарика:  $F = AD^2 (d/D)^n$ .  
 $a$  — размерная постоянная в законе вдавливания шарика диаметром  $D$ :  
 $F = ad^n$ .  
 $D = 2R$  — диаметр шарика.  
 $d = 2r$  — диаметр восстановленного отпечатка шарика или конуса.  
 $d$  — диагональ восстановленного отпечатка квадратной пирамиды.  
 $E$  — модуль Юнга.  
 $E$  — тензор чистой деформации.  
 $E'$  — тензор девiatorа деформации.  
 $E^*$  — шаровой тензор деформации.  
 $e = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3$  — среднее удлинение по осям координат.  
 $e_x, e_y, e_z$  — диагональные члены тензора девiatorа деформации.  
 $F$  — сила вдавливания наконечника.  
 $F_p$  — сила вдавливания наконечника, при которой начинается пластическая  
 деформация.  
 $G$  — модуль сдвига.  
 $H$  — число твердости по Герцу, новое число твердости по Дрозду.  
 $HA$  — число твердости по Ауэрбаху.  
 $HB$  — число твердости по Бринеллю.  
 $HL$  — число твердости по Лудвику.  
 $HM$  — число твердости по Мейеру.  
 $HRB$  — число твердости по шкале В Роквелла.  
 $HRC$  — число твердости по шкале С Роквелла.  
 $HV$  — число твердости по Виккерсу.  
 $h$  — глубина восстановленного отпечатка.  
 $h_1$  — высота падения наконечника.  
 $h_2$  — высота отскокивания наконечника.  
 $K$  — модуль всестороннего сжатия.  
 $k$  — пластическая постоянная среды.  
 $L$  — обозначение размерности длины.  
 $M$  — обозначение размерности массы.  
 $n$  — безразмерная постоянная (показатель степени) в законах вдавливания  
 шарика, конуса и пирамиды.  
 $p$  — давление на поверхности невосстановленного отпечатка.  
 $p_0$  — давление в центре поверхности касания.  
 $\bar{p}$  — среднее давление на поверхности невосстановленного отпечатка.  
 $R$  — радиус шарика, радиус сферического закругления вершины алмазного  
 конического наконечника Роквелла.  
 $S$  — площадь поверхности отпечатка.  
 $S_0$  — площадь проекции поверхности отпечатка на плоскость, перпендику-  
 лярную силе вдавливания.  
 $s = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  — среднее нормальное напряжение.  
 $s_x, s_y, s_z$  — диагональные члены тензора девiatorа напряжений.

- $W_1$  — кинетическая энергия наконечника до удара.  
 $W_2$  — кинетическая энергия наконечника после удара.  
 $w$  — упругое восстановление отпечатка шарика.  
 $T$  — обозначение размерности времени.  
 $t = h + w$  — глубина невозстановленного отпечатка.  
 $x = n - 2$  — показатель степени упрочнения, показатель кривой истинных напряжений.  
 $\alpha = 2\beta$  — угол при вершине конуса, угол между противолежащими гранями квадратной пирамиды.  
 $\beta = \alpha/2$  — половина угла при вершине конуса, половина угла между противолежащими гранями квадратной пирамиды.  
 $Y_1, Y_2, Y_3$  — главные сдвиги.  
 $Y_{xy}, Y_{yz}, Y_{zx}$  — сдвиги — составляющие тензора деформаций.  
 $\delta_p$  — равномерное удлинение при одноосном растяжении.  
 $\delta_k$  — удлинение в шейке разорванного образца.  
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — главные удлинения.  
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  — удлинения по осям координат, диагональные составляющие тензора деформации.  
 $\eta$  — коэффициент вязкости.  
 $\mu$  — коэффициент сухого трения.  
 $\nu$  — коэффициент Пуассона.  
 $\rho$  — величина радиуса-вектора, радиус кривизны восстановленного отпечатка.  
 $\Sigma$  — тензор напряжений.  
 $\Sigma'$  — тензор деватора напряжений.  
 $\Sigma''$  — шаровой тензор напряжений.  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения.  
 $\sigma_B$  — предел прочности при растяжении.  
 $\sigma_e$  — предел упругости при растяжении.  
 $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении.  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — диагональные составляющие тензора напряжений.  
 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  — главные касательные напряжения.  
 $\tau_s$  — предел текучести при сдвиге.  
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  — касательные напряжения — составляющие тензора напряжений.  
 $\Phi = 2 \arcsin \frac{d}{D}$  — угол вдавливания шарика.  
 $\psi_p$  — равномерное сужение.  
 $\psi_k$  — сужение в шейке порванного образца.



## ГЛАВА I

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### 1. ПОНЯТИЕ ТВЕРДОСТИ

Чувство осязания является источником по крайней мере четырех пар противоположных понятий: слабый — сильный, холодный — теплый, гладкий — шероховатый, мягкий — твердый. Первые два понятия давно уже получили строгое научное определение и нашли количественное выражение в единицах силы и температуры. Сравнительно недавно начались попытки создания количественных оценок для чистоты поверхности. Понятие же твердости до сих пор не имеет надлежащего научного определения.

Предметы, с которыми человек сталкивается в повседневной жизни и трудовой деятельности, почти всегда имеют выступающие части — ребра или вершины. После соприкосновения выступающих частей одного предмета с ровной поверхностью другого на их поверхностях могут оставаться отчетливые следы. В одних случаях образование этих следов сопряжено с пластической деформацией материала, в других — с разрушением материала — с соскабливанием его частиц на поверхности. В зависимости от результатов соприкосновения мы назовем из двух тел более твердым или то тело, на котором при вдавливании какого-то третьего тела образуется след («отпечаток») меньшего объема, или то тело, на котором при царапании каким-то третьим телом образуется след («царапина») меньшего поперечного сечения. Само собой разумеется, что для получения сравнимых результатов силы, прикладываемые к третьему телу, должны быть одинаковы, а форма выступающей части третьего тела должна сохраняться неизменной в процессе опыта.

Предложено свыше сотни принципиально различных приборов для измерения твердости, которые по своему устройству могут быть разделены на две группы:

- 1) приборы, в которых твердость определяется в зависимости от размеров вмятины на поверхности испытываемого тела;
- 2) приборы, в которых твердость определяется в зависимости от размеров царапины на поверхности испытываемого тела.

Интересно отметить, что основоположник технических измерений твердости, Реомюр, уже в 1722 г. указал на эти группы, отдавая предпочтение второй.

Приборы обеих групп опираются на наши осязательные представления и житейский опыт. Сопоставление мягкой резины и густого теста

наглядно обнаруживает различную роль упругих и неупругих деформаций в процессе определения твердости различных веществ. Учитывая все сказанное выше, мы приходим к тому формальному определению твердости, которое в несколько иной форме было высказано рядом авторов [7, 56].

Твердость есть особое свойство, которым в различной степени обладают реальные твердые тела и которое проявляется в их способности оказывать сопротивление всяким попыткам упруго или пластически деформировать участок поверхности тела или оторвать частицы вещества с этого участка или же одновременно произвести какую-либо комбинацию из этих трех действий.

Все существующие методы измерения твердости охвачены этой общей формулировкой. Полную классификацию методов можно получить, если учесть характер наблюдаемых деформаций и способ приложения нагрузки.

По характеру наблюдаемых деформаций имеются шесть классов методов измерения, основанных на:

- 1) упругом деформировании.
- 2) пластичном деформировании.
- 3) сочетании упругого и пластичного деформирования.
- 4) местном разрушении поверхности по узкому следу («царапине»);
- 5) разрушении большого участка поверхности;
- 6) корреляции какой-либо из эмпирических твердостей методов 1—5-го классов с другими характеристиками вещества.

По характеру приложения нагрузки все методы разделяются на две большие группы: С) методы статические и Д) методы динамические.

В табл. 1 включены наиболее известные методы измерения твердости с указанием их места в приведенной классификации.

По величине области тела, деформируемой в процессе измерения, в настоящее время различают макро- и микротвердость. При измерении микротвердости объем отпечатка, являясь микроскопически малым, лежит в пределах от 1 до 3000  $\mu\text{к}^2$ . Уменьшение объема отпечатка достигается снижением нагрузки, прилагаемой к вдавливаемому наконечнику. Между микро- и макротвердостью принято выделять еще твердость при малых нагрузках. Примерные границы всех этих областей даны в табл. 2. Нагрузки, указанные в табл. 2 в скобках, являются наиболее распространенными. Разграничение областей только по величине нагрузки является, конечно, чисто условным, лишенным физического смысла. Встречающееся иногда определение микротвердости как твердости в микроскопически малых объемах страдает неопределенностью. Д. Б. Гогоберидзе [7] выдвигал в качестве критерия размеры зерна испытуемого вещества. Он предлагал называть микротвердостью твердость, измеряемую в таких условиях, когда на результаты измерения влияют свойства только одного кристаллика (вернее, кристаллита — зерна поликристаллического вещества); макротвердостью — твердость, измеряемую в таких условиях, когда на результат измерения влияют свойства многих кристалликов. Для монокристаллов оба понятия совпадают.

Наибольшее значение в настоящее время приобрели статические методы измерения твердости и микротвердости, основанные на образовании вмятины («отпечатка наконечника») на плоской поверхности тела при осевом нагружении наконечника стандартной формы, изготовленного из определенного материала и установленного перпендикулярно к испытуемой поверхности. Имея в виду исключительно эти методы, очень часто определяют твердость как способность материала в твердом состоянии сопротивляться проникновению другого более твердого тела, не получающего при этом остаточных деформаций. Совершенно очевидно, что такое определение не совсем правильно описывает сущность статических методов,

Таблица 1

Класс	Характер учитываемой деформации	Характер приложения нагрузки	
		статический, группа С	динамический, группа Д
1	Упругая деформация	Метод вдавливания шарика до достижения предела упругости (Герц, Ауэрбах)	Метод измерения времени удара (Нелюбов, Ершов) Метод измерения высоты упругого отскока (склероскоп Шора)
2	Пластическая деформация	Метод вдавливания: 1) шарика (Бринелль); 2) острого конуса (Лудвик); 3) притупленного конуса (Роквелл); 4) пирамиды (Виккерс)	Метод измерения ударных отпечатков
3	Упругая и пластическая деформация	Метод вдавливания на заданную глубину (Кубасов, монотрон Шора)	Маятниковые методы (Менделеев, Герберт, Кузнецов, Ребиндер и др.)
4	Разрушение по узкому следу («царапине»)	—	Минералогическая шкала Мооса Склерометр Мартенса и др.
5	Разрушение на большой поверхности	—	Метод резания (напильник, сверло и т. д.) Метод абразивного шлифования (Ломоносов)
6	Деформации и разрушение отсутствуют	Нагрузка не прикладывается Немеханические методы косвенного измерения твердости (на основе корреляционных связей твердости с иными характеристиками материала)	

Таблица 2

Область измерения	Нагрузка	Диагональ отпечатка, мм	Объем несоставленного отпечатка, мм <sup>3</sup>
Микротвердость	1 + 200 гс (5 + 100 гс)	3 + 50	1 + 3 000
Твердость при малых нагрузках	0,2 + 5 кгс (0,2 + 2 кгс)	30 + 300	640 + 640 000
(Макро) твердость	Свыше 5 кгс	Свыше 300	Свыше 640 000

вводя очень туманное представление о «проникновении» твердого тела в твердое тело. Было бы лучше сказать: «Твердость — это свойство вещества в твердом состоянии сопротивляться образованию вмятины на его поверхности».

Оба формальных определения — ранее приведенное самое общее и только что сформулированное частное — не дают никаких конкретных указаний для количественной оценки того «сопротивления», которое должно служить мерой твердости. Чаще всего указывается величина некоторого условного среднего напряжения (пример — методы Бринелля и Виккерса) или величина деформации при определенных условиях нагружения (пример — метод Роквелла). Обзор наиболее известных приемов вычисления твердости по определяющим величинам, непосредственно измеряемым во время опыта, содержит табл. 3. Место, которое занимает рассматриваемый метод в принятой нами классификации (табл. 1), указано в последнем столбце табл. 3.

Уже при беглом взгляде на эту таблицу бросается в глаза то обстоятельство, что твердости, измеряемые различными методами, имеют разную размерность и, следовательно, не допускают непосредственного сравнения друг с другом. Кроме того, обширный экспериментальный материал, собранный до настоящего времени, учит, что каждая из этих «эмпирических твердостей» является величиной, зависящей не только от свойств материала, но в сильной степени и от условий измерения.

Во всех случаях измерительные процедуры должны производиться при некоторых определенных «стандартных» условиях, раз навсегда установленных для данного метода. При наличии развитой теории каждого способа, правильно учитывающей все существенные условия опыта, можно было бы вводить поправки при отступлении от стандартных условий, установить связь «твердости» с основными механическими характеристиками материала, а также связи между твердостями, измеряемыми различными методами. В настоящее время мы очень далеки от такого идеала и потребуются еще большая теоретическая и экспериментальная работа для того, чтобы улучшить современное неудовлетворительное положение с определением понятия твердости.

Вопрос о возможности введения понятия «абсолютной твердости»,\* т. е. определения такой физической величины, значение которой для данного материала не зависит от условий измерения, был впервые поднят знаменитым немецким физиком Генрихом Герцем в 1881 г. Рассматривая в рамках теории упругости соприкосновение под нагрузкой шарика с плоскостью на поверхности тела, состоящего из этого же материала, что и шарик, Герц определил твердость как то давление, при котором в центре поверхности соприкосновения будет превзойден предел упругости. Эспериментальное определение этого давления возможно только у хрупких тел, и измерение твердости по Герцу у металлов, например, почти невозможно. Губер в 1904 г. указал, что эта твердость, вопреки утверждению Герца, является величиной, зависящей от диаметра шарика. Э. Мейер в 1908 г. обратил внимание на то, что одинаково твердые тела по Герцу могут сильно различаться между собой после выхода напряжения за предел упругости, как это имеет место в современных приборах для статического измерения твердости. Замечания Губера и Мейера, хотя и показывают несостоятельность определения «абсолютной» твердости по Герцу,

\* Здесь, т. е. в применении к твердости, как и везде, слово «абсолютный» не имеет строго установленного смысла. Иногда под «абсолютной твердостью» понимают ту твердость, которая соответствует первоначально ненаклепанному состоянию металла до вдавливания наконечника.

Таблица 3

Размерность твердости	Определяющая величина	Определение твердости (Тв.)	Автор	Класс и группа
$L^0 M^0 T^0$	Изменение глубины вдавливания наконечника (мм) при добавлении основной нагрузки к предварительной	$HRC = 100(1 - 5M)$ е. т. *	Роквелл	2С
$L^{-2}$ (длина <sup>-2</sup> )	Ширина царапины при заданных условиях	Тв. обратно пропорциональна квадрату ширины царапины	Бирбаум	4Д
$L^{-1}$ (длина <sup>-1</sup> )		Тв. обратно пропорциональна ширине царапины	Мартенс	4Д
$M^{-1}$ (масса <sup>-1</sup> )	Потеря массы при заданных условиях	Тв. обратно пропорциональна потере массы		5Д
$T^{-1}$ (время <sup>-1</sup> )	Время для заданного уменьшения амплитуды качания маятника	Тв. обратно пропорциональна времени уменьшения амплитуды колебаний маятника	В. Д. Кузнецов	3Д
$T$ (время)	Подкасательная в начале кривой «амплитуда — время»	Тв. обратно пропорциональна скорости относительного уменьшения амплитуды колебаний маятника	П. А. Ребиндер	3Д
$L^{-1}T$ (скорость <sup>-1</sup> )	Изменение амплитуды колебаний маятника за определенный промежуток времени	Тв. обратно пропорциональна изменению амплитуды колебаний маятника за определенный промежуток времени	В. Д. Кузнецов	3Д
$MLT^{-2}$ (сила)	Нагрузка на наконечник	Тв. равна нагрузке, при которой появляется еле заметная царапина	Зеебек	4Д
	Глубина невозстановленного отпечатка	Тв. равна нагрузке, при которой достигается заданная глубина вдавливания	П. В. Кубасов	3С
$ML^{-1}T^{-2}$ (сила/площадь)	Поверхность восстановленного отпечатка	Тв. равна среднему напряжению на поверхности восстановленного отпечатка	Бринелль	2С
	Проекция поверхности восстановленного отпечатка	Тв. равна среднему напряжению на проекции поверхности восстановленного отпечатка	Мейер	2С

\* е. т. — условные единицы твердости.

Размерность твердости	Определяющая величина	Определение твердости (Тв.)	Автор	Класс и группа
$ML^{-1}T^{-2} \left( \frac{\text{работа}}{\text{объем}} \right)$	Объем восстановленного отпечатка	Тв. равна частному от деления работы на объем восстановленного отпечатка	Мартель	2Д
$ML^{-1}T^{-2} \left( \frac{\text{сила}}{\text{объем}} \right)$	Объем восстановленного отпечатка	Тв. равна частному от деления силы на объем восстановленного отпечатка	Руссел	2С
	Поверхность и глубина восстановленного отпечатка	Тв. равна частному от деления силы на произведение поверхности и глубины восстановленного отпечатка	Швет	2С

не лишают его работу большого значения и для наших дней, как это будет показано при подробном ее анализе.

Существует несколько неудачных попыток заменить понятие твердости иным, более определенным понятием. В прошлом веке многократно высказывалась мысль о том, что твердость характеризуется модулем упругости [78, 93]. Эту точку зрения защищал П. П. Лазарев в 1918 г. [34]. Даже в 1927 г. Кокадо [79] предлагал отождествить твердость с сопротивлением материала сжатию. По Кокадо твердость — это то напряжение, при котором образец сжимается до половины своего первоначального размера. Им составлены формулы для вычисления этого напряжения по результатам испытания на твердость стальным шариком.

В. Д. Кузнецов [32, 33] предлагал заменить понятие твердости понятием поверхностной энергии твердого тела. Такая замена не дает никаких теоретических или практических преимуществ, ибо, по словам самого автора, «... существует несколько методов определения поверхностной энергии твердых тел, но эти методы дают иногда резко отличные друг от друга результаты. Такие же не согласующиеся друг с другом значения дают и теоретические вычисления» [33, стр. 7]. В. К. Семенченко [49, стр. 412] оценивает положение совершенно аналогично: «... в настоящее время надежная проверка формул для поверхностного натяжения металлов, как теоретических, так и эмпирических, невозможна просто из-за отсутствия экспериментальных данных. Имеющиеся экспериментальные данные несистематичны, немногочисленны, а в некоторых случаях неточны или из-за недостатка данной методики, или из-за наличия примесей (во многих случаях неизвестных) в исследуемом металле».

П. А. Ребиндер [46] рассматривает твердость как работу поверхностного диспергирования, т. е. как работу, затрачиваемую на образование единицы новой поверхности твердого тела в процессах тонкого диспергирования (например шлифования). Нахождение этой работы связано с большими трудностями потому, что в доступную для измерения полную работу шлифования, помимо работы увеличения поверхности, входят работа пластических деформаций и теплота трения. В силу этого обстоятельства определение П. А. Ребиндера оказалось чисто декларативным, что было уже отмечено в свое время Н. Н. Давиденковым [11, стр. 88].

Надан в своей монографии [38, стр. 198] кратко сформулировал состояние вопроса об определении твердости следующим образом:

«Неоднократно делались попытки рассматривать твердость как основное механическое свойство материала, дополняющее такие свойства, как упругость, пластичность, прочность.

Тщательное исследование этих многочисленных попыток показывает, что:

1) термин «твердость» употребляется в разных смыслах минералогами, металлургами и инженерами;

2) во всех методах, предложенных для измерения твердости, распределение напряжений, приложенных к материалу, имеет сложный характер и мы не можем вычислить поле напряжений и деформаций.»

Две задачи стоят перед исследователями:

1) необходимо прежде всего отречься от многозначности слова «твердость» и условиться определять твердость одним совершенно определенным методом;

2) для выбранного метода необходимо построить теорию, которая могла бы удовлетворительно предсказывать результат измерительных операций с учетом всех существенных условий опыта.

Первая задача могла бы быть решена без промедления на основе международного соглашения. Легко предвидеть, что на роль узаконенного нормального метода может претендовать один из методов статического вдавливания.

Настоящая работа будет посвящена преимущественно обзору попыток создания теории измерения твердости по статическому вдавливанию наконечников трех общеупотребительных форм — шаровой, конической и пирамидальной. Будет также рассмотрена теория динамических методов.

Теория физических явлений может, как известно, развиваться в двух направлениях: в феноменологическом и атомистическом. Феноменологическое рассмотрение вдавливания следует отнести к области механики материалов, атомистическое — к области физики твердого тела.

## 2. ТВЕРДОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Мысль о том, что твердость определяется силами взаимодействия между частицами твердого тела, была, по-видимому, впервые высказана Декартом, Гюйгенсом и Христианом Вольфом [8]. Она получила широкое развитие в трудах М. В. Ломоносова. В своей студенческой работе «Образчик знания физики: о превращении твердого тела в жидкое, зависящем от движения имеющейся налицо жидкости» он писал: «Твердое тело — такое, в котором все частицы связаны. Твердые тела различаются степенью твердости. . . чем тверже тело, тем прочнее связаны его частицы. . . чем тверже тела, тем труднее воспрепятствовать взаимной связи их молекул. . .»

По современным представлениям силы химической связи в кристаллах составляют четыре группы, которые, впрочем, часто образуют некоторые сочетания друг с другом.

К первой группе относятся ионные кристаллы, часто встречающиеся среди неорганических соединений. В узлах кристаллической решетки расположены поочередно положительные и отрицательные ионы, взаимно притягивающиеся по закону Кулона. Типичными представителями ионных кристаллов служат хлористый натрий, углекислый кальций, сернокислый кальций, корунд, силикаты. Ионные силы взаимодействия легче всего поддаются теоретическому расчету. Потенциальная энергия взаимодействия выражается простой формулой

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{b}{r^n}, \quad (1)$$

где  $e$  — заряд;  $r$  — межионное расстояние;  $b$  и  $n$  — постоянные.

Первый член формулы (1) учитывает потенциальную энергию электростатического притяжения по закону Кулона, второй — потенциальную энергию сил отталкивания, которые проявляются при сближении ионов. На больших расстояниях можно пренебречь вторым членом и, следовательно, можно считать, что энергия отделения ионов изменяется обратно пропорционально расстоянию.

К второй группе относятся атомные кристаллы, у которых в узлах решетки находятся нейтральные атомы. Сила взаимодействия между атомами обязана образованию общего электронного облака, в котором спины электронов имеют противоположные направления. Для образования этого типа связи электроны каждого атома должны быть лишены возможности образовать пары внутри самого атома. Именно этот тип связи в наибольшей мере соответствует валентным связям — штрихам валентности у химиков. В атомных кристаллах атомы сближены более, чем в ионных, что находит свое проявление в увеличении твердости. Кристаллы алмаза являются атомными и их высокая твердость есть результат гомеоплярных связей между атомами углерода.

К третьей группе относятся металлы. Валентные электроны в металлах не принадлежат отдельным атомам, они, так сказать, «обобществляются», образуя электронное облако вокруг положительно заряженных ионов.

К четвертой группе относятся многие физические соединения, у которых химическая связь обусловлена силами Ван дер Ваальса. Эти силы возникают вследствие взаимной поляризации между нейтральными атомами без валентностей или между молекулами, у которых валентности атомов насыщены. Этот вид связи является самым слабым, и соответствующие кристаллы очень мягки.

Уже Аристотель считал твердость тесно связанной с плотностью. В прошлом веке Кеннгот [77] и Боттон [64] пытались установить связь между атомными объемами минералов и их твердостью по Моосу. По их данным, между твердостью  $H$  и атомными объемами  $V$  существует обратная пропорциональность

$$H = \frac{C}{V}, \quad (2)$$

где  $V = A/\rho$ ;

$A$  — атомный (или молекулярный) вес;

$\rho$  — плотность.

Эту формулу выдвигал П. П. Лазарев с оговоркой, что она строго применима только к аморфным телам, а у кристаллов можно наблюдать значительные отклонения.

Бенедикс [62] считает твердость обратно пропорциональной коэффициенту теплового удлинения, что приводит к прямой пропорциональности между твердостью и квадратом частоты колебаний атомов в решетке

$$H \approx Af^2. \quad (3)$$

Если воспользоваться формулой Дебая для частоты, то формула для твердости получит вид

$$H \approx \left( \frac{3\rho}{\Phi} \right)^{2/3}. \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность;

$\Phi$  — сложная функция плотности  $\rho$ , модуля сжимаемости  $K$  и коэффициента Пуассона  $\nu$

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} \rho^{2/3} K^{1/2} \left[ 2 \left( \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \right)^{3/2} + \left( \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \right)^{3/2} \right]. \quad (5)$$



Аллен [60] установил эмпирическую формулу для частоты  $f$ , которая после подстановки в выражение (3) приводит к соотношению

$$H \approx A \left( \frac{n}{Z} \right)^2, \quad (6)$$

где  $A$  — атомный вес;

$Z$  — атомный номер;

$n$  — целое число, характерное для данного элемента, называемое Алленом числом частоты.

Результаты вычисления по формулам (3)—(6) располагаются примерно в том же порядке, как и экспериментально измеряемые твердости по Бригеллю, что можно видеть, например, в табл. 4, составленной Алленом. Вычисленные значения на полпорядка меньше экспериментальных, но относительные изменения твердости воспроизводятся более или менее правильно.

Таблица 4

Гольдшмидт [9, 71, 72] детально рассмотрел для ионных кристаллов зависимость твердости по методу царапания от валентности и межионного расстояния. Шкала Мооса была им дополнена. Только в том случае, когда кристалл можно было царапать во всех направлениях, он считался мягче эталонного минерала. Твердость можно было вычислять по формуле

Элемент	$H$	$HВ$
Pb	1,1	4
Al	4,0	20
Au	5,3	25
Cu	6,2	49
Fe	12,0	66

$$H = a \frac{\omega_+ \omega_-}{r^m}, \quad (7)$$

где  $\omega_+$  и  $\omega_-$  — валентности катиона и аниона;

$r$  — расстояние между ионами;

$m$  — показатель степени, зависящий от вида решетки (для решетки типа NaCl, например,  $m = 4 \div 6$  и т. д.).

Шкала Мооса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Слоистые решетки	[График]									
Валентность 1	[График]									
" 2	[График]									
" 3	[График]									
" 4-5	[График]									

Рис. 1. Диаграмма А. Е. Ферсмана.

Ширина линий пропорциональна числу минералов.

Для ионных кристаллов сформулированы следующие закономерности:

1) твердость тем выше, чем больше координационное число;

2) при заданном атомном радиусе твердость увеличивается с увеличением валентности частиц, образующих кристалл;

3) твердость уменьшается, если межионное расстояние увеличивается после замены какого-либо из ионов элементом из того же вертикального столбца периодической системы. Правило не соблюдается, если замена производится иначе;

4) твердость может уменьшаться, если при сохранении межионных расстояний и валентности замена частиц увеличивает в кристалле силы поляризации.

Влияние валентности на величину твердости по царапанию очень наглядно можно проследить на диаграмме А. Е. Ферсмана [53], которая охватывает 260 важнейших минералов (рис. 1).

В. Д. Кузнецов исследовал абразивную твердость ионных кристаллов галоидных солей и пришел к заключению, что эта твердость на разных кристаллографических плоскостях одного и того же кристалла изменяется обратно пропорционально межионному расстоянию. Такая же зависимость наблюдается и при сравнении различных галоидных кристаллов. Именно эти опыты дали повод В. Д. Кузнецову сделать предложение о замене понятия «твердость» понятием «поверхностная энергия», о котором мы уже упоминали выше. Поверхностная энергия ионных кристаллов изученного типа пропорциональна межионному расстоянию, так же как и их абразивная твердость. Это обстоятельство рассматривалось им в расширенном плане как доказательство тождества понятий «поверхностная энергия» и «твердость» вообще.

Паф, исходя из теории дислокаций [89], установил связь между мягкостью, т. е. величиной, обратной твердости, модулем сдвига и вектором Бюргерса. Он дает следующую формулу:

$$\frac{1}{HB} = \frac{C}{Gb} + f\left(\frac{T}{T_m}, t\right), \quad (8)$$

где  $C$  — коэффициент пропорциональности;

$G$  — модуль сдвига;

$b$  — вектор Бюргерса при температуре измерения  $T$ ;

$T_m$  — температура плавления;

$t$  — время приложения нагрузки.

Для металлов, у которых температура плавления выше или равна  $1000^\circ\text{C}$ , функцию в правой части равенства (8) можно принять равной нулю, что позволяет найти приближенное значение коэффициента пропорциональности  $C$ . Предел прочности всех чистых металлов выражается формулой

$$\sigma_s = \frac{aK}{f\left(\frac{Gb}{K}\right)}, \quad (9)$$

где  $K$  — модуль объемного сжатия;

$a$  — постоянная решетки.

В первом приближении можно считать, что предел прочности металлов прямо пропорционален модулю объемного сжатия и постоянной решетки.

Б. М. Ровинский [48] сделал попытку установить, в какой мере механические свойства твердых тел определяются прочностью связей в кристаллической решетке, оцениваемой по характеристической температуре Дебая.

Остановимся на основных положениях работы Ровинского. Потенциальная энергия частицы — иона или атома, входящей в состав кристаллической решетки, может быть представлена в виде суммы двух членов, которые соответствуют силам притяжения и отталкивания. В положении равновесия, когда частицы не подвержены действию внешних сил, потенциальная энергия имеет минимальное значение. Тепловое движение в кристаллах сводится к колебаниям частиц, не выходящим за пределы потенциальной ямы. Разложим энергию  $w(r)$  двухатомной модели в ряд по степеням отклонения  $u = r - r_0$  атома от положения равновесия на расстоянии  $r_0$ :

$$w(r) = w(r_0) + \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_0} u + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)_{r=r_0} u^2 + \dots$$

Сила, возникающая при отклонении от положения равновесия, равна

$$F = -\frac{dw}{dr} = -\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)_{r=r_0} u - \frac{1}{2} \left(\frac{d^3w}{dr^3}\right)_{r=r_0} u^2 - \dots$$

При малых отклонениях вторым и следующими членами разложения можно пренебречь. Сила оказывается тогда прямо пропорциональной удалению атома от положения равновесия. Коэффициент пропорциональности

$$q = \left( \frac{d^2w}{dr^2} \right)_{r=r_0} \quad (10)$$

можно назвать коэффициентом жесткости системы. Под действием квазиупругих сил атом будет совершать гармонические колебания с частотой, равной

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{m}}$$

где  $m$  — масса атома.

Отсюда коэффициент жесткости равен

$$q = 4\pi^2 m f^2 \quad (11)$$

Максимальная частота упругих колебаний частиц в решетке может быть выражена, как известно из теории теплоемкости твердых тел, через характеристическую температуру Дебая  $\Theta$

$$f = \frac{k\Theta}{h} \quad (12)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана;

$h$  — постоянная Планка.

Коэффициент жесткости после подстановки значения частоты колебаний выразится окончательно так:

$$q = 4\pi^2 m \left( \frac{k\Theta}{h} \right)^2 \quad (13)$$

Значения характеристической температуры, полученные из измерений теплоемкости при разных температурах, хорошо совпадают со значениями, вычисляемыми по модулю всестороннего сжатия  $K$  и коэффициенту Пуассона  $\nu$  на основании формулы

$$\Theta = \frac{h}{k} \left( \frac{9N}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{K^{1/3}}{M^{1/3} \rho^{1/3} [\varphi(\nu)]^{1/3}} \quad (14)$$

где  $N$  — число Авогадро;

$\rho$  — плотность вещества;

$M = \rho N a^3$ ;

$a$  — период решетки;

$\varphi(\nu)$  — функция коэффициента Пуассона

$$\varphi(\nu) = \left[ \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \right]^{2/3} + 2 \left[ \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \right]^{2/3} \quad (15)$$

Выразив модуль всестороннего сжатия через коэффициент жесткости

$$K = \frac{[\varphi(\nu)]^{2/3}}{6,868\pi^{2/3} a} q \quad (16)$$

можно на основании известных из теории упругости соотношений

$$E = 3(1-2\nu)K, \quad G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K$$

выразить модуль упругости и модуль сдвига через коэффициент жесткости

$$E = \frac{3(1-2\nu)[\varphi(\nu)]^{2/3}}{6,868\pi^{2/3} a} q, \quad G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \cdot \frac{[\varphi(\nu)]^{2/3}}{6,868\pi^{2/3} a} q \quad (17)$$



Таким образом упругие свойства кристаллических твердых тел определяются коэффициентом жесткости, т. е. прочностью связи частиц в решетке.

Проверка показала, что пропорциональность между  $E$  и  $G$ , с одной стороны, и коэффициентом жесткости (практически пропорциональной ему величиной  $10^8 \text{ m} \Theta^2$ ), с другой, наблюдается в пределах возможного разброса, обусловленного примесями и различием обработки образцов.

«Такие технические характеристики механических свойств металлов, как твердость, предел прочности, истинное сопротивление разрыву и др., в значительно большей мере определяются методикой их измерения, условиями обработки и количеством и характером примесей, нежели упругие свойства. Поэтому данные, приводимые в сводках, составленных по работам разных авторов, . . . , практически не сопоставимы. Известную ценность представляют поэтому сведения о твердости и относительной износостойкости ряда металлов, приводимые в работах М. М. Хрущева и М. А. Бабичева [57, 58], поскольку они получены . . . при помощи единообразной методики и относятся к отожженным или литым металлам примерно одного уровня чистоты — технически чистым» [48, стр. 58].

Твердость по Виккерсу оказалась пропорциональной квадрату коэффициента жесткости в пределах каждой из двух групп, на которые распались изученные металлы. К одной малочисленной группе относятся Cd, Zn, Ti, Be, к другой, основной, группе — Pb, Sn, Cu, Al, Ni, Co, Fe, Cr, Mo, W.

В заключение Ровинский пишет [48, стр. 63]: «Коэффициент жесткости решетки  $q$ , легко определяемый по характеристической температуре, является константой, хорошо характеризующей ряд механических свойств твердых тел. Установлено, что модуль нормальной упругости и модуль сдвига металлов одного «уровня» чистоты являются линейными функциями коэффициента жесткости, а столь разные механические характеристики, как твердость, истинное сопротивление разрыву, предел прочности и относительная износостойкость, являются линейными функциями  $q^2$ ».

Там же на стр. 57 он отмечает: «Следует принять во внимание трудности, а в ряде случаев и неопределенности, присущие определению упругих констант и характеристической температуры. И характеристическая температура, значения которой надежно установлены, как известно, лишь для металлов, кристаллизующихся в кубической системе, и константы упругости зависят от количества и характера примесей, от условий предварительной обработки металла (литье, продолжительность и температура отжига) и других факторов».

### 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

#### Тензор напряжений

В твердом теле, находящемся в равновесии при наличии внешних сил, имеются внутренние напряжения. Для того чтобы определить величину этих напряжений, надо мысленно провести плоское сечение и рассмотреть силы взаимодействия образовавшихся двух частей тела. Отношение сил, действующей на малую площадку, к площади этой площадки должно стремиться к некоторому пределу при уменьшении величины площадки стягиванием ее к некоторой точке. Этот предел и называется напряжением в данной точке данного сечения. Напряжение можно разложить на нормальное напряжение  $\sigma$ , перпендикулярное сечению, и касательное напряжение  $\tau$ , направление которого лежит в плоскости сечения.

Если через ту же самую точку провести сечение в другом направлении, величина и направление напряжения изменятся. Для того чтобы описать

напряженное состояние тела, необходимо знать нормальные и касательные напряжения в каждой его точке для каждого положения сечения, которое можно задать тремя углами между внешней нормалью к сечению и положительными направлениями осей принятой системы прямоугольных координат. Можно показать, что напряженное состояние в точке будет известно, если будут известны шесть компонентов симметричного тензора напряжений

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Индексы у нормальных напряжений и первые индексы у касательных напряжений указывают направление нормали к сечению, вторые индексы у касательных напряжений указывают направление составляющей. При переходе к другой системе координат компоненты тензора изменяются по определенному закону так, что приведенные ниже функции компонентов сохраняют свою величину, т. е. являются инвариантами преобразования координат:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const} \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const} \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Существует система координат, при переходе к которой касательные напряжения обращаются в нуль. Оси этой системы называются главными осями напряжения. В плоскостях, перпендикулярных этим осям, — в «главных плоскостях напряжения», действуют только нормальные напряжения, так называемые главные напряжения. Величина главных напряжений  $\sigma_i$  определяется корнями кубического уравнения:

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0. \quad (20)$$

Наибольшие касательные напряжения возникают на тех площадках, которые делят пополам углы между главными плоскостями напряжений. Эти так называемые главные касательные напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Нормальные напряжения на площадках с наибольшими касательными напряжениями равны  $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$ ,  $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$ ,  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ .

Тензор напряжений можно представить как сумму двух тензоров — шарового тензора  $\Sigma''$  и тензора девиатора напряжения  $\Sigma'$ :

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma''. \quad (22)$$

Шаровой тензор имеет диагональные компоненты, равные среднему нормальному напряжению  $s = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = I_1/3$ ,

$$\Sigma'' = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Диагональные компоненты тензора девиатора напряжения равны диагональным компонентам тензора напряжения минус среднее нормальное напряжение, остальные компоненты обоих тензоров совпадают:

$$\Sigma' = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & s_z \end{vmatrix}. \quad (24)$$

где  $s_x = \sigma_x - s$ ,  $s_y = \sigma_y - s$ ,  $s_z = \sigma_z - s$ .

Разложение на шаровой тензор и тензор девиатора напряжений единственно, потому что среднее нормальное напряжение является инвариантом.

### Тензор деформаций

Картина распределения деформаций в теле описывается тензором деформаций, который, как всякий тензор, может быть представлен единственным образом в виде суммы антисимметричного и симметричного тензоров. Антисимметричный тензор отображает перемещение точек тела, связанное с вращением вокруг оси, проходящей через начало координат. Его можно не учитывать. Симметричный тензор является тензором чистой деформации

$$E = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{yz}/2 & \epsilon_z \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Относительные удлинения  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  по осям координат выражаются через компоненты перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  следующим образом:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (26)$$

Сдвиги  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  равны

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (27)$$

Все что было сказано о преобразованиях и инвариантах тензора напряжений может быть повторено в применении к тензору деформации с внесением необходимых изменений в обозначениях.

Существует система координат, при переходе к которой сдвиги обращаются в нуль. Оси этой системы называются главными осями деформаций. Главные удлинения обозначаются  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ . Главные сдвиги, происходящие в плоскостях, делящих пополам углы между главным осями деформаций, равны

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= |\epsilon_2 - \epsilon_3| \\ \gamma_2 &= |\epsilon_3 - \epsilon_1| \\ \gamma_3 &= |\epsilon_1 - \epsilon_2| \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Тензор деформаций можно представить как сумму шарового тензора  $E''$  и тензора девиатора деформаций  $E'$

$$E = E' + E''. \quad (29)$$

Шаровой тензор имеет диагональные компоненты, равные среднему удлинению  $e = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3$ .

Тензор девиатора деформаций имеет следующую матрицу:

$$E' = \begin{vmatrix} e_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & e_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{yz}/2 & e_z \end{vmatrix}. \quad (30)$$

где  $e_x = \epsilon_x - e$ ,  $e_y = \epsilon_y - e$ ,  $e_z = \epsilon_z - e$ .

## Реологические модели твердых тел

Объяснение механических свойств твердых тел с точки зрения атомной структуры вещества и кинетической теории является важной задачей физики твердого тела, которая еще очень далека от полного решения. Возможен другой более простой метод изучения твердых тел, опирающийся на классическую механику сплошных сред. Поведение тела под действием приложенных к нему внешних сил можно описать, формулируя математическую связь между составляющими тензора напряжений и тензора деформаций — так называемое «реологическое уравнение состояния» (Рейнер, [47, 91]). В ходе развития реологии — феноменологической

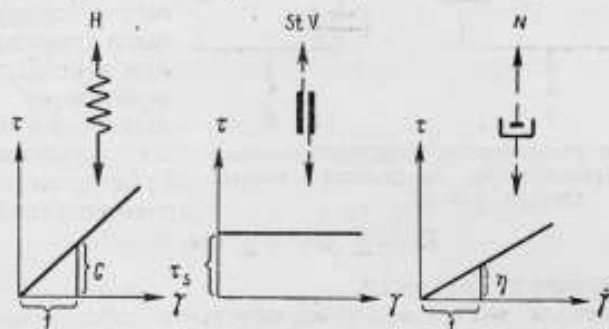


Рис. 2. Основные реологические тела: Гука (H), Сен Венана (St V), Ньютона (N).

науки о деформациях и течении вещества — выдвигались разные линейные уравнения, которые служат более или менее хорошими приближениями для реальных тел, но совершенно строго («по определению») применимы только к идеальным телам. Коэффициенты реологических уравнений являются эмпирическими константами, не выводимыми из значений каких-либо универсальных физических констант. Три основных реологических свойства — упругость, пластичность, вязкость — нашли воплощение в трех идеальных телах (рис. 2): твердом теле Гука H ( $\tau = G\dot{\gamma}$ ), жесткопластичном теле Сен Венана StV ( $\tau = \tau_s$ ) и вязкой жидкости Ньютона N ( $\tau = \eta\dot{\gamma}$ ). Четвертое основное реологическое свойство — прочность — в этих моделях отсутствует. Реальные тела обладают одновременно всеми свойствами и могут быть приближенно моделированы идеальными телами, составленными из сочетания тел Гука, Сен Венана и Ньютона. Остановимся на часто применяемых моделях твердого тела.

В теоретической механике твердого тела предполагается, что тело является абсолютно жестким, т. е. не испытывает никаких деформаций при действии любых сил. Тензор деформаций для этого тела тождественно равен нулю:  $\mathbf{E} = 0$ . Абсолютно жесткое тело иначе называется евклидовым, потому что геометрия Эвклида основана на постулате о существовании таких тел, не деформирующихся при любых перемещениях в пространстве.

В теории упругости предполагается, что тело строго подчиняется закону Гука. Математическая формулировка закона Гука приводит к двум уравнениям, связывающим в отдельности девиаторы и шаровые тензоры

$$\Sigma' = 2GE'; \quad \Sigma'' = KE'',$$

где  $G$  — модуль сдвига;

$K$  — модуль сжимаемости.

У тела Гука деформация и напряжения находятся в однозначной зависимости.

У реальных тел наблюдаются многие явления: релаксация напряжений, упругое последействие, внутреннее трение, зависимость модулей упругости от частоты, которые свидетельствуют о существовании неупругости — свойства, благодаря которому нарушается однозначная связь между деформацией и напряжением уже при малых напряжениях — в той области, где еще нет пластических деформаций. Первые попытки учесть явления неупругости путем обобщения теории упругости были сделаны еще в прошлом веке. Для объяснения релаксации напряжений Максвелл в 1868 г. предложил комбинировать закон Гука с законом течения ньютоновской жидкости

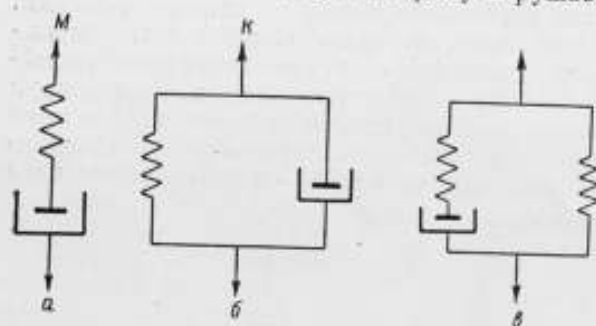


Рис. 3. Сложные реологические тела: тело Максвелла (а), тело Кельвина (б), стандартное линейное твердое тело (в).

$$\Sigma' = \Sigma'/2G + \Sigma'/2\eta,$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Тело Максвелла является последовательным соединением тел Гука и Ньютона:  $M = H - N$  (а на рис. 3). Для объяснения упругого последействия Фохт в 1890 г., исходя из идеи Кельвина о вязкости твердых тел, предложил иное уравнение:

$$\Sigma' = 2GE' + 2\eta\dot{E}'.$$

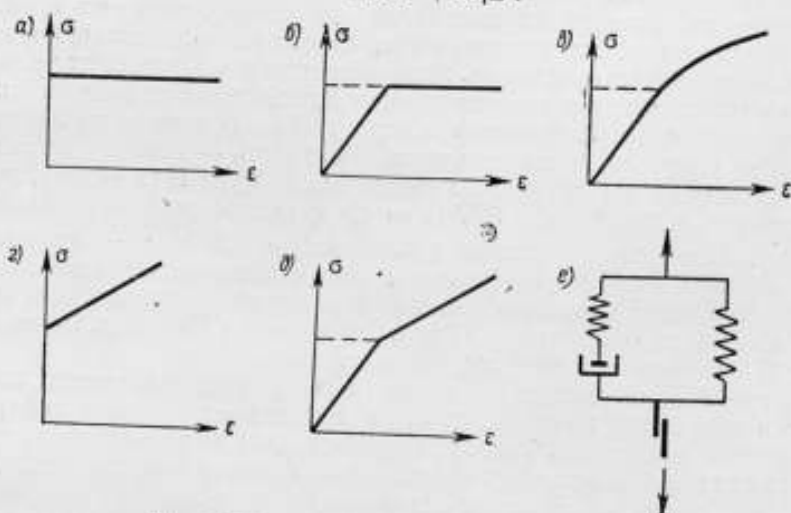


Рис. 4. Диаграмма растяжения разных тел.

Тело Кельвина является параллельным соединением тел Гука и Ньютона:

$$K = H \parallel N \quad (\text{б на рис. 3}).$$

Современная теория неупругости (Зинер, [28]) использует более сложную модель стандартного линейного тела, у которого

$$\Sigma' + \alpha\Sigma' = \beta E' + \gamma\dot{E}' \quad (\text{в на рис. 3}).$$



У реальных тел, когда напряжения превзойдут некоторый предел, начинаются пластические деформации. Теории пластичности прибегают к значительной схематизации поведения твердого тела. В модели жестко-пластичного тела тело считается жестким вплоть до момента наступления пластичности (тело Сен Венана, *a* на рис. 4). В модели упругопластичного тела, составленной последовательным соединением тел Гука и Сен Венана, все явления неупругости остаются вне поля зрения (*b* на рис. 4). Пластическая деформация реального тела сопровождается упрочнением — повышением предела текучести (*в* на рис. 4). В теории пластичности в самом лучшем случае рассматриваются жестко упрочняющиеся или упруго упрочняющиеся тела с линейным законом упрочнения (*г* и *д* на рис. 4).

Сочетание модели жесткопластичного тела со стандартным и линейным телами позволило бы соединить теорию пластичности с теорией неупругости (*e* на рис. 4). Насколько нам известно, эта модель еще не обсуждалась в литературе.

Теория статических измерений твердости, при которых образуются пластические отпечатки, должна всецело опираться на теорию пластичности. Как показало рассмотрение ныне применяемых моделей твердого тела, теория пластичности может пока описать вдавливание наконечника только в самом грубом первом приближении.

### Закон подобия

При наличии дифференциальных законов движения системы (или уравнений равновесия как частного случая движения) можно, не производя интегрирования уравнений, установить числовые соотношения между механическими явлениями, происходящими в двух разных геометрически подобных системах. Уравнения движения не позволяют выбирать отношения соответственных параметров обеих систем (иначе говоря — выбирать «масштабы отображения параметров одной системы в другой системе») целиком произвольно и независимо друг от друга, устанавливая определенные соотношения между этими «масштабами». Эти соотношения, которые обязательно должны соблюдаться при сравнении двух систем, выражают «закон подобия» систем.

Впервые закон подобия для одного частного случая движения был указан еще самим Ньютоном в 1687 г., который воспользовался им для вывода закона сопротивления жидкостей движению твердого тела. В 1874 г. В. Л. Кирпичев в статье «О подобии при упругих явлениях», опубликованной в «Журнале Русского физического общества», сформулировал закон подобия для упругих деформаций, рассматривая уравнения равновесия упругих тел. В 1885 г. Кик эмпирически установил закон подобия для пластических деформаций тел из одного и того же вещества. Важно обратить внимание на различие областей применимости законов подобия для упругих и пластических деформаций. Закон подобия для упругих деформаций применим для тел из разных материалов, свойства которых определяют две константы — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Закон подобия для пластических деформаций применим исключительно для тел из одного и того же материала, потому что отсутствие общепризнанной теории пластичности не позволяет формулировать закон подобия исчерпывающим образом, исходя из анализа надежно обоснованных дифференциальных уравнений движения пластичной среды. Существующие попытки распространить закон подобия пластических деформаций на разные вещества всегда связаны с произвольным введением тех или иных эмпирических констант пластичности.

Н. Н. Давиденков [11] детально рассмотрел применение закона подобия в механике материалов для различных случаев нагружения. Дальнейшее изложение основано на его формулировках.

Два геометрически подобных тела из одного и того же материала, находящиеся под действием внешних сил, должны считаться механически подобными, если как напряженные состояния (тензоры напряжений), так и деформации (тензоры деформаций) во всех соответственных точках тождественны. Тождественность тензоров напряжений и деформаций является специфическим ограничением, вытекающим из требования одинакового использования данного материала. В самом общем случае подобия можно было бы предполагать пропорциональность составляющих тензоров каждого вида в отдельности.

Первое условие механического подобия состоит в том, чтобы все внешние силы были приложены в соответственных точках сравниваемых тел и были одинаково ориентированы по отношению к системам координат, выбранным одинаковым образом в каждом теле.

Вторым условием в случае статического нагружения сосредоточенными внешними силами служит так называемый закон подобия Барба—Кика, согласно которому геометрически подобные и подобно нагруженные внешними силами тела из одного и того же материала получают одинаковые напряжения и одинаковые относительные деформации как в пределах области упругих деформаций, так и за пределами ее, если все силы пропорциональны квадратам линейных размеров тел. Работа внешних сил в процессе деформирования является пропорциональной кубу линейных размеров тела.

Этот закон находит прямое применение, например при определении твердости по Бринеллю, когда для получения одинаковых результатов при пользовании шариками разного диаметра необходимо обеспечить определенную «степень нагружения», т. е. определенную величину отношения  $F/D^2$ .

При определении твердости по Виккерсу степень нагружения не имеет значения, так как отпечатки пирамиды геометрически подобны при любой глубине вдавливания.

#### 4. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

##### Постановка задачи

Два упругих изотропных тела приведены в соприкосновение в одной из точек своих идеально гладких поверхностей и сдавливаются затем двумя противоположными силами, направленными по общей нормали поверхностей тел в точке их касания. При сдавливании поверхности тел вблизи точки первоначального соприкосновения сплющиваются, образуется площадка касания, в результате упругих деформаций тела сближаются и в них появляются внутренние напряжения. При заданных упругих постоянных обоих тел и заданной величине усилия сдавливания требуется найти внутренние напряжения в телах, форму и размеры площадки касания, распределение нормального давления на площадке касания и, наконец, величину «сближения» тел. Задача допускает некоторые упрощения, если одно из тел можно считать штампом, т. е. абсолютно жестким телом. Для теории твердости наиболее интересен частный случай, когда поверхность одного из тел является плоскостью, а само тело занимает полупространство. В зависимости от формы второго тела следует различать плоские, осесимметричные и общие контактные задачи.

Приведенная формулировка задачи допускает некоторые обобщения (например, наличие первоначального касания не в изолированной точке, а в нескольких точках или на нескольких площадках; наличие сил трения и проч.), которые, однако, не представляют особого интереса для теории твердости.

### Историческая справка

Первые работы, посвященные пространственным контактным задачам, принадлежат Г. Герцу и Ж. Буссинеску.

Герц [74] рассматривал контакт двух упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка — эллиптическими параболоидами или эллиптическими цилиндрами. Выбор формы поверхностей обусловлен допущением, что точка первоначального соприкосновения тел является регулярной, и сохранением членов второй степени относительно координат в разложении уравнений поверхности в степенные ряды. В своей работе Герц исходил из теории потенциала однородного эллипсоида. Он нашел, что площадка касания ограничена эллипсом и что давление в точках площадки, если его наглядно представить в виде отрезков, параллельных оси сжатия, изображается поверхностью эллипсоида.

Ж. Буссинеск [65] рассмотрел задачу о вдавливании в ограниченное плоскостью упругое полупространство цилиндрического штампа с плоским круговым основанием.

Ляв [80] решил задачу о вдавливании жесткого конуса.

После работ Герца и Буссинеска развитие методов решения контактных задач приостановилось почти на полвека, в течение которого основные усилия ученых были направлены на экспериментальную проверку теории и на применение ее в инженерном деле.

А. М. Динник [13] установил пригодность формул Герца для статического и динамического сдавливания. Н. М. Беляев [1] применил теорию Герца к расчету рельсов.

Дальнейшее развитие теории началось с 30-х годов текущего столетия на основе новых математических методов — применения теории функций комплексного переменного и сингулярных интегральных уравнений, разработанных главным образом Н. И. Muskhelishvili и его школой [36, 37]. Основные работы были выполнены советскими исследователями. Зарубежные авторы во многих случаях с запозданием приходили к результатам, ранее полученным советскими учеными.

Новые задачи были впервые решены В. М. Абрамовым (1939) и И. Я. Штаерманом (1939). Ряд ценных исследований принадлежит И. Я. Штаерману, Л. А. Галину, А. И. Лурье, М. Я. Леонову, Г. Н. Савину и другим. В отечественной литературе решению контактных задач теории упругости посвящены две монографии: И. Я. Штаермана [59] и Л. А. Галина [5].

### Решение задачи Герца

Решение задачи о сдавливании двух упругих тел было получено Герцем в предположении, что: 1) при разложении в степенной ряд уравнений сдавливаемых поверхностей можно ограничиться удержанием членов вторых степеней, 2) линейные размеры площадки касания очень малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей, 3) материал обоих тел подчинен закону Гука, 4) сила сдавливания направлена по общей нормали поверхностей в первоначальной точке их соприкосновения и 5) напряжения, распределенные по площадке касания, нормальны к ней.

Не останавливаясь на процессе решения задачи, с которым можно познакомиться, например, в монографиях Л. А. Галина или И. Я. Штаермана, приведем готовые результаты, применяемые при теоретических расчетах твердости.

### Вдавливание шара в плоскую поверхность

Диаметр круга касания равен

$$d = \sqrt[3]{3FD \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]}, \quad (31)$$

где  $F$  — усилие вдавливания;  
 $D$  — диаметр шара;  
 $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости тела и шара;  
 $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона тела и шара.  
 Давление в какой-либо точке внутри круга касания, отстоящей на расстоянии  $q$  от его центра, равно

$$p = p_0 \sqrt{1 - (q/r)^2}. \quad (32)$$

Максимальное давление наблюдается в центре круга касания. Оно равно

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi d^2/4} = 0,918 \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]^{-2/3} \left( \frac{F}{D^2} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

Если предположить, что шарик и тело изготовлены из одного материала, а коэффициент Пуассона равен 0,3, то формулы (31) и (33) примут вид:

$$d = 2,218 \sqrt[3]{\frac{RF}{E}} = 1,762 \sqrt[3]{\frac{DF}{E}}; \quad (34)$$

$$p_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{E^2 F}{R^2}} = 0,616 \sqrt[3]{\frac{E^2 F}{D^2}}. \quad (35)$$

Благодаря деформациям шара и плоскости, центр шара опустится на расстояние

$$\delta = 1,55 \sqrt[3]{\frac{1}{D} \left( \frac{F}{E} \right)^2}. \quad (36)$$

### Вдавливание шара в сферическую лунку

Обозначим радиус кривизны лунки  $R_1$ , радиус шара  $R_2$ . Диаметр круга касания равен

$$d = \sqrt[3]{3F \frac{\left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]}{\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}}}. \quad (37)$$

Максимальное давление в центре круга касания равно

$$p_0 = 0,918 \left[ \frac{\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \right]^{2/3} F^{1/3}. \quad (38)$$

Если предположить, что  $E_1 = E_2 = E$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ , то формулы примут вид:

$$d = 1,762 \sqrt[3]{\frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2} \cdot \frac{F}{E}}, \quad (39)$$

$$p_0 = 0,616 \sqrt[3]{\left(\frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2}\right)^2 E^2 F}. \quad (40)$$

Изменение расстояния между центрами шара и лунки

$$\delta = 1,55 \sqrt[3]{\frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2} \left(\frac{F}{E}\right)^2}. \quad (41)$$

## 5. ЗАДАЧА ВДАВЛИВАНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

### Общая формулировка критерия пластичности

Пластическая деформация наступает при самых различных сочетаниях напряжений и деформаций, и, следовательно, критерий пластичности должен найти свое выражение в виде некоторой функции напряжений и деформаций. Если в области упругих деформаций вплоть до начала пластичности существует однозначная взаимосвязь напряжений и деформаций, то задача несколько упрощается, потому что тогда для формулировки критерия пластичности надо искать функцию одних напряжений

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0.$$

Условие изотропности материала сильно сужает класс возможных функций. Поскольку значение функции не должно изменяться при переходе к любой системе координат, то искомая функция должна определяться какой-то комбинацией инвариантов тензора напряжения. Если приложение внешних сил может нарушать изотропность, то только что сделанный вывод окажется несостоятельным. В дальнейшем постулируется, что изотропное идеально пластичное тело остается изотропным при любых нагрузках.

Опыт учит, что пластичность металлов в первом приближении может считаться не зависящей от приложения умеренных гидростатических напряжений. Гидростатические напряжения (положительные или отрицательные) не вызывают пластических деформаций сами по себе и не влияют на наступление пластичности при любом сложном напряженном состоянии. Эти факты приводят к заключению, что функция, выражающая критерий пластичности, должна быть комбинацией инвариантов девиатора напряжений. Если девиатор отнесен к главным осям, то его инварианты должны выразиться симметричными функциями его главных значений  $s_1, s_2, s_3$ , т. е. значение каждой функции не должно изменяться при любой перестановке аргументов, поскольку расстановка индексов на осях является произвольной и не должна влиять на значение инварианта. Из высшей алгебры известно, что любая симметричная функция  $n$  независимых переменных может быть представлена в виде функции  $n$  линейно независимых симметричных функций этих переменных. В применении к нашему случаю можно выбрать в качестве линейно независимых симметричных функций главных значений девиатора следующие выражения:

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3;$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2);$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3).$$

Любой инвариант девиатора напряжений, выраженный в главных значениях, может быть представлен как функция  $J_2$  и  $J_3$ , так как  $J_1$  тождественно равен нулю.

Критерий пластичности должен иметь вид

$$F(J_2, J_3) = 0.$$

Постулируем у идеально пластичного тела отсутствие эффекта Баушингера, т. е. совпадение по величине пределов текучести при последовательных растяжениях и сжатиях. Функция  $F$  тогда должна быть симметричной по отношению к величине  $J_3$ , знак которой зависит от знака напряжения.

Задачу отыскания критерия пластичности в настоящее время еще нельзя считать окончательно решенной. Все предложенные до сих пор критерии имеют ограниченную область применения. Опыты показали также, что гидростатическое давление оказывает заметное влияние на наступление пластичности, т. е. одна из посылок приведенного вывода неверна. Необходимо уточнение основ теории.

### Критерий пластичности Губера — Мизеса

Критерий пластичности Губера — Мизеса, получивший наибольшее признание, выражается равенством

$$J_2 - k^2 = 0, \quad (42)$$

где  $k$  — пластическая постоянная, которая, как будет показано ниже, равна пределу текучести на сдвиг.

Если выразить главные значения девиатора через главные напряжения  $s_i = \sigma_i - s$ , где  $s = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ , то после алгебраических преобразований можно придать критерию следующий вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2. \quad (43)$$

При одноосном растяжении, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , пластичность наступит, если напряжение  $\sigma_1$  станет равным пределу текучести на растяжение  $\sigma_s$ . Из критерия пластичности вытекает

$$2\sigma_s^2 = 6k^2,$$

откуда

$$k = \sigma_s \sqrt{3}. \quad (44)$$

При чистом сдвиге, например при  $\sigma_1 = -\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ , пластичность наступит, когда касательное напряжение  $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$  достигнет предела текучести на сдвиг  $\tau_s$ . Из критерия пластичности вытекает, что  $k = \tau_s$ .

### Критерий пластичности Треска — Сен Венана

Критерий пластичности Треска — Сен Венана имеет сложное выражение через инварианты тензора девиатора напряжений:

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0, \quad (45)$$

где  $k$  — пластическая постоянная.

Если выразить инварианты через главные значения девиатора напряжений, можно придать критерию следующий вид:

$$[(s_1 - s_2)^2 - 4k^2] \cdot [(s_2 - s_3)^2 - 4k^2] \cdot [(s_3 - s_1)^2 - 4k^2] = 0. \quad (46)$$

Разности главных значений девиатора можно заменить равными им соответствующими разностями главных напряжений. Произведение

нескольких сомножителей равно нулю, если один из них обращается в нуль. Эти замечания позволяют записать критерий пластичности еще и в таком виде:

$$2|\tau_1| = |\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2k;$$

$$2|\tau_2| = |\sigma_3 - \sigma_1| \leq 2k;$$

$$2|\tau_3| = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k.$$

Пока во всех трех условиях имеет место неравенство — материал находится в упругом состоянии. При наступлении пластичности в одном или двух условиях должен появиться знак равенства. Одновременное появление знака равенства во всех трех условиях невозможно, ибо тогда было бы нарушено тождественное соотношение между касательными напряжениями — равенство нулю их суммы. Приведенная форма записи оправдывает часто встречающееся название критерия максимального касательного напряжения.

При одноосном растяжении, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , пластичность наступит, если  $\sigma_1 = \sigma_s = 2k$ . При чистом сдвиге, когда  $\sigma_1 = -\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ , пластичность наступит, если  $\tau_2 = \tau_s = k$ . В ряде случаев проще применять критерий Треска — Сен Венана, чем критерий Губера — Мизеса.

#### Критерий пластичности Хаара — Кармана

Пластическая деформация наступает, когда два главных напряжения равны, а одно из касательных напряжений становится равным половине предела текучести на растяжение

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad |\tau_3| = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_1| = \frac{1}{2}\sigma_s \quad (47)$$

Как показал А. Ю. Ишлинский [29], этот критерий получается из уравнений пространственного деформирования вязкопластичной среды в предельном случае при коэффициенте вязкости, равном нулю. Критерий позволяет упростить решение многих задач теории пластичности и поэтому часто применяется для приближенного анализа этих задач.

#### Решение задачи вдавливания штампов

Задача о вдавливании штампа (т. е. абсолютно жесткого наконечника) в плоскую поверхность полубесконечного идеально пластичного тела до сих пор имеет строгое решение только в двух частных двумерных случаях — для плоского штампа и для клина [31, 55, 88].

Предельная нагрузка на единицу длины плоского штампа, при достижении которой под штампом начинается пластическое течение, равна

$$F = 2(\pi + 2)ak, \quad (48)$$

где  $2a$  — ширина штампа;

$k$  — пластическая постоянная.

Предельная нагрузка на единицу длины клина равна

$$F = 4 \sin \frac{\alpha}{2} (1 + \varphi)lk, \quad (49)$$

где  $\alpha$  — угол клина;

$\varphi$  — величина, определяемая по углу клина с помощью уравнения

$$\varphi + \arctg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \alpha,$$

$l$  — расстояние, на котором щека клина соприкасается с материалом;

$k$  — пластическая постоянная.

В. В. Соколовский [50] рассматривал вдавливание штампов различных форм, но предполагал, что поверхность тела остается плоской, что в действительности неверно. Как заметил Хилл, основная трудность при строгом решении задачи — это вычисление деформации поверхности и ее влияния на напряжения.

А. Ю. Ишлинский [30] рассмотрел важную осесимметричную задачу вдавливания шарика, исходя из критерия пластичности Хаара — Кармана и пользуясь приближенным методом характеристик С. А. Христиановича, развитым для решения задач вдавливания В. В. Соколовским.

Ишлинский вводит следующие допущения:

- 1) шарик является абсолютно жестким;
- 2) трение между поверхностью шарика и поверхностью среды отсутствует;
- 3) искривлением плоской поверхности среды вокруг отпечатка шарика можно пренебречь.

При этих условиях для плоского штампа справедливо соотношение

$$\sigma_s = 2k = 0,352 \frac{F}{S},$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении;

$k$  — постоянная пластичности;

$F$  — сила вдавливания;

$S$  — площадь основания штампа.

Для сферического штампа при угле вдавливания  $\varphi = \arcsin 0,376$  имеем аналогично

$$\sigma_s = 2k = 0,383 \frac{F}{S}$$

Отсюда твердость по Бринеллю ( $=F/S$ ) будет связана с пределом текучести соотношениями:

для плоского штампа

$$HB = 2,84\sigma_s \quad (50)$$

для сферического штампа

$$HB = 2,61\sigma_s \quad (51)$$

Твердость по Мейеру для сферического штампа

$$HM = 2,66\sigma_s \quad (52)$$

Свою работу Ишлинский заканчивает следующими словами: «Отношение диаметра контактной поверхности для сферического штампа к диаметру сферы было равно 0,376. Для плоского штампа это отношение следует считать равным нулю, если рассматривать задачу о плоском штампе как предельную задачу о сферическом штампе с возрастающим диаметром. Таким образом, отношение числа твердости по Бринеллю к пределу текучести для упругопластических тел без упрочнения должно мало зависеть от диаметра отпечатка. Это обстоятельство, а также числовое значение отношения находятся в соответствии с некоторыми экспериментами, по данным которых  $\sigma_s = 0,34 \div 0,36HB$ ».

Следует заметить, что по Бринеллю предел прочности для углеродистых сталей составляет 34,6%  $HB$ .

И. Н. Тылевич [52] рассмотрел задачу о вдавливании в пластичное полупространство жесткого конуса с углом при вершине  $170^\circ$ . При вдавливании такого тупого конуса на поверхности образца, как показали опыты, образуется столь незначительный валик (высотой несколько микрон), что его можно обнаружить только с помощью точных измеритель-



ных приборов. Можно поэтому считать, что внешняя граница пластического тела, примыкающая к контуру отпечатка, практически остается плоской, и применить для решения данной задачи методы В. В. Соколовского. Дифференциальные уравнения равновесия элементов пластической среды были преобразованы И. Н. Тылевичем к удобной для численного интегрирования форме на основе наглядных представлений. Численное интегрирование по методу характеристик было произведено на электронной счетной машине типа «Урал» с учетом и без учета сил трения на поверхности соприкосновения конуса с пластической средой. Твердость по Мейеру для отпечатка конуса с углом при вершине  $170^\circ$  оказалась связанной с пределом текучести соотношениями

$$\left. \begin{aligned} HM &= 2,80\sigma_s \quad (\mu = 0) \\ HM &= 2,94\sigma_s \quad (\mu = 0,05) \\ HM &= 3,03\sigma_s \quad (\mu = 0,15) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Увеличение среднего давления на поверхности отпечатка при увеличении коэффициента трения является естественным потому, что наличие сил трения вызывает прирост давления на поверхности отпечатка.

ГЛАВА II  
СТАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТВЕРДОСТИ

А. ВДАВЛИВАНИЕ ШАРИКА

6. ТВЕРДОСТЬ ПО ГЕРЦУ (1882 г.)

Теория Г. Герца (1881 г.)

В 1881 г. Г. Герц опубликовал [74] общее решение следующей важной задачи теории упругости:

«Два изотропных упругих тела касаются очень малой частью своих идеально гладких поверхностей, причем взаимное давление на площадке касания предполагается конечным. Даны: сила сдвливания, упругие постоянные — модуль упругости и коэффициент Пуассона обоих тел, форма и взаимное расположение их поверхностей вблизи точки касания, когда сила вдавливания равна нулю. Требуется найти форму и размеры площадки касания, распределение нормальных напряжений на площадке, а также сближение обоих тел, вызванное деформацией при сдвливании».

Найденное Герцем решение общей задачи касания двух изотропных упругих тел вскоре побудило его сделать попытку [75] дать «новое, простое и точное» определение твердости взамен многочисленных прежних недостаточно ясных определений. Эта попытка, как указано далее, оказалась неудачной, но Герц бесспорно явился основоположником теории твердости.

Твердость по Герцу измеряется нормальным давлением в середине кругообразной площадки касания, при котором в какой-либо точке тела напряжение достигнет предела упругости. Своей твердости Герц приписал значение константы вещества и так его поняли последующие исследователи.

Если рассматривать самый простой случай вдавливания шарика диаметром  $D = 2R$  в плоскость на поверхности тела, состоящего из того же материала, что и шарик, то по соображениям симметрии площадь касания заведомо будет кругом. Применяя к рассматриваемому случаю общие формулы, можно найти все интересующие нас величины.

Диаметр  $d = 2r$  круга касания равен

$$d = 2,289 \left[ \frac{1-\nu^2}{E} RF \right]^{1/2}, \quad (54)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;

$E$  — модуль упругости;

$F$  — сила сдвливания шарика и плоскости.

Среднее давление на поверхности круга касания есть частное от деления силы сдавливания на площадь круга. Оно равно

$$\bar{p} = \frac{F}{\pi r^2} = 0,2429 \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{F}{R^2} \right)^{1/2}. \quad (55)$$

Максимальное давление внутри круга касания имеет место в его центре. Оно в полтора раза превышает среднее давление и равно поэтому

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi r^2} = 0,3644 \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{F}{R^2} \right)^{1/2}. \quad (56)$$

Твердость по определению Герца будет равна

$$H = 0,3644 \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{F_p}{R^2} \right)^{1/2}, \quad (57)$$

где  $F_p$  — сила сдавливания, при которой достигается предел упругости.

Герцем были произведены только очень немногочисленные измерения твердости стекла. Большие экспериментальные исследования были сделаны Фешлем, Швердтом и особенно Ауэрбахом.

Фешль установил, что твердость, измеренная при вдавливании двух накрест положенных цилиндров, отличается от твердости, измеренной при вдавливании шарика в плоскость. Этот факт противоречит представлениям Герца, который считал, что форма сдавливаемых тел не существенна, коль скоро образующаяся при сдавливании площадка касания имеет форму круга.

Ауэрбах установил, что твердость по Герцу не является величиной постоянной, не зависящей от радиуса кривизны шарика. Постоянным является произведение твердости по Герцу и корня кубического из радиуса шарика.

Губер рассмотрел теоретически вопрос о зависимости твердости от радиусов кривизны сдавливаемых тел.

### Опыты Ауэрбаха (1891 г.)

Ауэрбах посвятил несколько работ измерениям твердости по Герцу [61]. Он формулирует три задачи, которые должны быть решены в ходе развития измерений твердости:

- 1) установление научного определения;
- 2) создание метода и аппаратуры;
- 3) измерение твердости различных тел.

Первую задачу Ауэрбах считает решенной Герцем и целью своих работ ставит решение двух последних задач.

Прибор Ауэрбаха (рис. 5) позволяет производить измерение

круга касания полусферического испытуемого образца с прозрачной стеклянной пластинкой. Образец укреплен на коротком плече рычага, прижимающего его к пластинке. На длинное плечо рычага нагружены гири. В некоторых сериях опытов стеклянную пластинку серебрили или покрывали тонким слоем сажи, что позволяло производить измерение диаметра круга касания при косом освещении после снятия нагрузки.

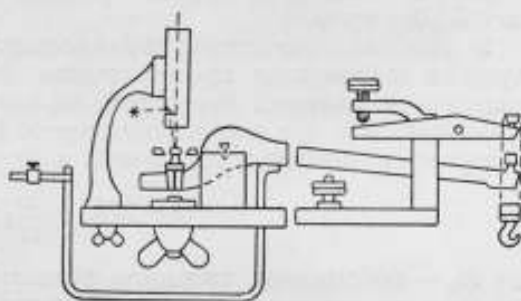


Рис. 5. Прибор Ауэрбаха.

Опыты Ауэрбаха показали, что полусферические образцы с различными радиусами кривизны дают результаты, не всегда согласующиеся с теоретическими выводами Герца.

1. При заданном радиусе шарика и упругих постоянных отношение силы сдвливания к кубу диаметра круга касания по теории должно быть постоянным:  $F/d^3 = \text{const}$ . На опыте это соотношение выполняется только приближенно.

2. При заданных упругих постоянных отношение произведения силы сдвливания и радиуса шарика к кубу диаметра круга касания по теории должно быть постоянным:  $FR/d^3 = \text{const}$ .

Опыт показал, что это соотношение соблюдается с большой точностью. (Оба первых положения Ауэрбаха не согласуются друг с другом!)

3. Постулируя постоянство твердости и упругих постоянных, можно теоретически вывести следующие соотношения, которые должны соблюдаться при измерении твердости сферических образцов с различными радиусами кривизны:

$$\frac{F_p}{d^2} = \text{const}; \quad \frac{F_p}{R^2} = \text{const}; \quad \frac{d}{R} = \text{const}. \quad (58)$$

Опыты не подтверждают этих соотношений, так как на самом деле наблюдается постоянство других отношений, а именно

$$\frac{F_p}{d^{3/2}} = \text{const}; \quad \frac{F_p}{R} = \text{const}; \quad \frac{d^{3/2}}{R} = \text{const}. \quad (59)$$

4. Поскольку при выводе формул Герца предполагается малость отношения  $d/R$ , можно было бы ожидать, что результаты измерений будут согласовываться тем лучше с теорией, чем меньше будет относительные размеры кругов касания. Опыт, однако, не подтверждает этого заключения.

5. Для того чтобы получить одинаковые значения твердости в случае применения образцов с различными радиусами кривизны, Ауэрбах предложил рассматривать в качестве числа твердости произведение числа твердости по Герцу на корень кубический из радиуса кривизны образца

$$HA = H \sqrt[3]{R}. \quad (60)$$

Результаты всех измерений Ауэрбаха найдены с помощью этой эмпирической формулы.

В поисках объяснения наблюдаемых отступлений от теории Герца Ауэрбах высказывает предположение, что твердость одного и того же вещества не является величиной, не зависящей от формы тела, как это предполагалось при построении теории. При сдвливании всегда сначала наступает разрушение пластинки, а не линзы. Ауэрбах допускает, что

$$H = f(R) = H_0 + \frac{b}{R},$$

где  $H_0$  — собственная твердость вещества, которая наблюдается у бесконечно протяженной плоской пластинки;

$b/R$  — добавочная поверхностная твердость, обратно пропорциональная радиусу кривизны наружной поверхности, которая при испытании сдвливается с плоским образцом.

В плоском образце касательные напряжения достигают максимума внутри образца под центром круга касания, а нормальные напряжения разрыва имеют максимум на поверхности за пределами круга касания. Достижение предельного состояния по-разному проявляется у тел хруп-

ких и пластичных. У тел хрупких, у которых сопротивление сдвига велико, наблюдается разрушение от разрыва, проявляющегося в образовании трещин за пределами круга касания. У тел пластичных течение материала вызывает появление пластичного отпечатка. Устанавливать этот момент весьма трудно и определение твердости по Герцу или Ауэрбаху для пластических тел невозможно благодаря неизбежности очень больших погрешностей.

### Критика Губера (1904 г.)

Герц рассматривал напряжение только в центре площадки касания, хотя установленные им исходные уравнения приложимы к каждому из соприкасающихся тел в целом. Явное решение уравнений для напряжений в любой точке площадки касания было дано Губером в 1904 г. [76], который подверг критике определение твердости по Герцу, опираясь на результаты опытов Ауэрбаха.

В силу осевой симметрии напряженное состояние полностью определяется четырьмя составляющими тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ , которые равны

$$\begin{aligned}\sigma_x &= p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{\sqrt{u}} \left[ 2\nu + \frac{(1+\nu)u}{r^2+u} - (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{r} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{u}} \right] \right\}; \\ \sigma_y &= -p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \right] + \left( \frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \frac{r^2 u}{u^2 + r^2 z^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{\sqrt{u}} \left[ \frac{(1-\nu)u}{r^2+u} + (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{r} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{u}} - 2 \right] \right\}; \\ \sigma_z &= p_0 \left( \frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \frac{r^2 u}{u^2 + r^2 z^2}; \\ \tau_{yz} &= p_0 \frac{\varrho z^2}{u^2 + r^2 z^2} \cdot \frac{r^2 \sqrt{u}}{r^2 + u}.\end{aligned}$$

В этих формулах принято

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

$u$  — положительный корень уравнения

$$\frac{\varrho^2}{r^2 + u^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1.$$

Если положить  $\varrho = 0$  и  $z = 0$ , то эти формулы перейдут в формулы Герца.

Внутри круга касания  $z = 0$ ,  $u = 0$  и, кроме того,

$$\left( \frac{z}{\sqrt{u}} \right)_{\substack{z=0 \\ u=0}} = \frac{0}{0} = \frac{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}{r}.$$

Составляющие напряжений внутри круга касания будут

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \varrho^2} \right)^3 \right] + \frac{2\nu}{r} \sqrt{r^2 - \varrho^2} \right\}; \\ \sigma'_y &= -p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \varrho^2} \right)^3 \right] - \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \varrho^2} \right\}; \\ \sigma'_z &= p_0 \frac{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}{r}.\end{aligned}$$

Полагая  $q = 0$ , получим формулы Герца.

Вне круга касания при условии  $z \ll q$  получим

$$\sigma_x^r = p_0 \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{q^2};$$

$$\sigma_y^r = - p_0 \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{r^2}{q^2}.$$

Эти напряжения достигают максимума на контуре круга касания, когда  $q = r$ .

Напряжение  $\sigma_y^r$  определяет максимальное растяжение, возможное при сдавливании двух шаров. Опыты Ауэрбаха установили, однако, что у хрупких материалов разрушение наблюдается на малом, но доступном для измерения расстоянии от окружности круга касания. Этот факт можно объяснить тем, что формулы справедливы только при выполнении условия  $z \ll q$ . Можно показать, что уже при  $z/q \approx 1 \cdot 10^{-3}$  не может быть и речи о хорошем приближении формулами Герца. Кривизна поверхности сильно снижает величину растягивающих напряжений у краев круга касания, если только  $r/R > 2 \cdot 10^{-3}$ . Опыты Ауэрбаха действительно установили, что при сдавливании пластинки и шарика в первую очередь всегда разрушается пластинка.

Все изложенные соображения доказывают, что определение твердости по Герцу является несостоятельным. Твердость, вычисленная на основании опыта сдавливания двух шаров, будет отличаться от твердости, вычисленной на основании опыта сдавливания пластинки и шара, хотя в обоих случаях площадка касания имеет форму круга, как это предполагает Герц в своем определении твердости.

Максимальное давление в центре круга касания может быть представлено в следующем виде:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{r}{R}. \quad (61)$$

Если бы твердость по Герцу была постоянной материала, то разрушение хрупких материалов наблюдалось бы при употреблении шариков разного диаметра при одинаковых значениях отношения  $r/R$ . Опыты Ауэрбаха не подтверждают этого заключения. По мнению Губера, это объясняется той ролью, которую должны играть явления поверхностной прочности. В некоторых опытах Ауэрбаха, когда  $R = 1$  и  $r/R = 1/11$ , толщина растянутого слоя у края круга касания едва достигает 0,001 мм. Именно на этой глубине происходит изменение знака составляющей  $\sigma_y^r$ .

## 7. ТВЕРДОСТЬ ПО БРИНЕЛЛЮ (1900 г.)

Метод измерения твердости вдавливанием стального шарика был впервые предложен шведским инженером Бринеллем в 1900 г., когда этот метод демонстрировался на Парижской всемирной выставке. Нетрудно заметить, что метод Бринелля стоит в известной преемственной связи с методом Герца. В обоих случаях речь идет о вдавливании шарика на плоскости. Новым в методе Бринелля является, во-первых, применение во всех случаях шарика не из испытываемого материала, а из стали, и, во-вторых, в выходе за предел упругости и измерении пластических отпечатков, остающихся на плоской поверхности испытываемых образцов.

Твердость по Бринеллю определяется как отношение усилия вдавливания  $F$  к условной площади отпечатка  $S$ , вычисляемой в предположении, что эта площадь является сегментом вдавливаемого шара диаметром  $D$ :

$$HB = \frac{F}{S}. \quad (62)$$

Поверхность сегмента шара равна произведению большой окружности на высоту сегмента  $t$ , т. е.

$$S = \pi Dt. \quad (63)$$

Экспериментальное определение  $t$  затрудняется как малостью глубины отпечатка, так и образованием валика или завала на краях отпечатка. По геометрическим соображениям можно  $t$  выразить через диаметр отпечатка  $d$ :

$$t = \frac{1}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2}), \quad (64)$$

и тогда окончательная формула для твердости получит хорошо известный вид

$$HB = \frac{2F}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})} \text{ кгс/мм}^2. \quad (65)$$

Нужно особо подчеркнуть условность вычисления поверхности отпечатка. После снятия нагрузки происходит упругое изменение формы образовавшегося отпечатка — так называемое «восстановление отпечатка». Как показали специальные опыты, диаметр отпечатка при восстановлении практически не изменяется, а глубина уменьшается. Вычисляемая по геометрическим соображениям глубина («высота сегмента») соответствует, пожалуй, ближе всего невозстановленному отпечатку, когда материал плотно облегает поверхность шарика под нагрузкой. В литературе (см., например, [7, 41]) широко распространено ошибочное мнение, что в методе Бринелля вычисляется поверхность восстановленного отпечатка.

Формуле (65) для вычисления твердости по Бринеллю можно придать иной вид, если воспользоваться понятием угла вдавливания  $\varphi$ , под которым понимается центральный угол, опирающийся на края отпечатка в сечении шарика плоскостью, проходящей через силу вдавливания и перпендикулярной поверхности испытуемого предмета. Как видно из рис. 6,  $\sin \varphi/2 = d/D$  и

$$HB = \frac{2F}{\pi D^2 \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (66)$$

Число твердости по Бринеллю зависит от нагрузки, прилагаемой к шарiku. При изменении нагрузки происходит изменение угла вдавливания. Результаты измерения твердости одного и того же объекта шариками разного диаметра будут совпадать только в том случае, если углы вдавливания будут одинаковыми, т. е., иначе говоря, если отпечатки будут геометрически подобны между собой. Обращаясь к формуле (66), нетрудно усмотреть, что для получения геометрически подобных отпечатков необходимо соблюдать определенное отношение силы вдавливания к квадрату диаметра шарика, соблюдать, как принято говорить, определенную «степень нагружения шарика». Наиболее выгодным считается угол вдавливания, близкий к  $44^\circ$  ( $\varphi = 2 \arcsin 0,375$ ). К стандартам на измерение твердости по Бринеллю обычно прилагаются таблички, помогаю-

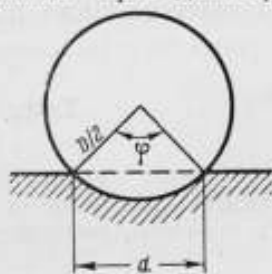


Рис. 6. Угол вдавливания шарика.

щие правильно подобрать нагрузку применительно к испытываемому материалу. Формула, выражающая зависимость твердости по Бринеллю от нагрузки, будет приведена и будет обсуждаться позднее в связи с законом Мейера.

### 8. ТЕОРИЯ МЕЙЕРА (1908 г.)

В 1908 г. Евгений Мейер опубликовал обстоятельную статью [84], посвященную анализу метода измерения твердости вдавливанием шарика. Работа Мейера имеет большое значение, на нее опирались многие последующие авторы. Эмпирический закон Мейера получил широкую известность и служит отправной точкой многих попыток построения теории твердости. Ниже подробно рассмотрены основные положения Мейера.

#### Твердость по Мейеру как среднее давление

Предположим, что на поверхности невосстановленного отпечатка между шариком и испытываемым телом отсутствует трение. Рассмотрим силы, приложенные к шарiku со стороны тела (рис. 7). По со-

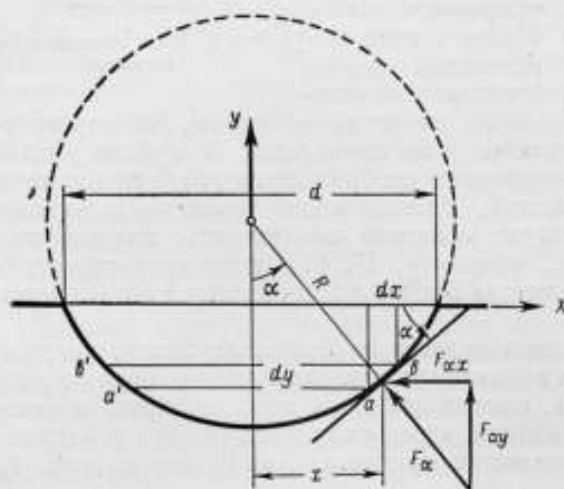


Рис. 7. Напряжения при вдавливании шарика.

ображениям шаровой симметрии давление  $p_a$  во всех точках кругового пояса  $abb'a'$  всюду одинаково, т. е. не зависит от азимута. Величина этого давления является функцией угла  $\alpha$ , образуемого с вертикалью любой нормалью к элементарной площадке на пояске. Площадь поверхности пояска, равная  $2\pi R dy$ , на основании геометрических соотношений, очевидных из рисунка, может быть записана следующим образом:

$$2\pi \frac{x}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \alpha dx = \frac{2\pi x dx}{\cos \alpha}.$$

Горизонтальные составляющие сил, действующих на поясок, взаимно уравниваются. Вертикальная составляющая силы, действующей на единичную площадку, выделенную на пояске, равна  $F_\alpha = p_a \cos \alpha$ . Равнодействующая всех вертикальных составляющих сил, действующих на поясок, равна произведению  $F_\alpha$  на площадь пояска. После сокращения это произведение будет равно  $p_a 2\pi x dx$  и его можно рассматривать как произведение давления  $p_a$  на проекцию  $dS_\alpha$  площади пояска на плоскость, параллельную первоначальной поверхности испытываемого тела. Сумма всех равнодействующих вертикальных сил, действующих на все пояски на поверхности отпечатка, очевидно равна приложенной к шарiku вертикальной нагрузке

$$\int_0^{d/2} p_a 2\pi x dx = F.$$



Среднее давление можно найти, как обычно, по формуле

$$\bar{p} = \frac{\int_0^{d/2} p_a 2\pi x dx}{\int_0^{d/2} 2\pi x dx} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (67)$$

Интеграл в знаменателе формулы (67) равен проекции поверхности отпечатка на первоначальную плоскую поверхность испытуемого тела.

При отсутствии трения между шариком и телом среднее давление на поверхность отпечатка равно отношению усилия вдавливания к площади проекции отпечатка на плоскость тела, на которой образуется отпечаток. Это положение применимо также к отпечаткам конуса и пирамиды.

Мейер считает более целесообразным определять твердость именно как среднее давление на поверхности отпечатка. Эта твердость по Мейеру,

$$HM = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \text{ кгс/мм}^2, \quad (68)$$

отличается от твердости по Бринеллю тем больше, чем больше угол вдавливания (или чем больше глубина отпечатка). Отношение твердостей равно отношению площади сегмента шара к площади его основания

$$\frac{HM}{HB} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{4}} \quad (69)$$

В табл. 5 приведены значения этого отношения для разных углов вдавливания.

Таблица 5

$d/D$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\varphi^\circ$	23,06	34,90	47,16	60,00	73,74
$HM/HB$	1,010	1,023	1,044	1,072	1,111

### Закон Мейера

Измерения диаметров восстановленных отпечатков, образующихся при разных усилиях вдавливания, позволили Мейеру принять при  $0,1 \leq d/D \leq 1$  степенную зависимость, указанную в 1897 г. Фепплем [70] и в 1899 г. Рашем [90]:

$$F = ad^n, \quad (70)$$

где  $a$  и  $n$  — размерная и безразмерная постоянные.

В литературе формула (70) известна как закон Мейера. Для шариков разного диаметра показатель степени  $n$  одинаков, постоянная же  $a$  имеет различные значения. Закон подобия позволяет обосновать независимость показателя степени от диаметра шарика, а также установить связь между значениями  $a$  для разных шариков. Предположим, что для шарика диаметром  $D_1$  найдена формула  $F = a_1 d^{n_1}$ , а для шарика диаметром  $D_2$  —

формула  $F = a_2 d^{n_2}$ . По закону подобия при одинаковом угле вдавливания  $\varphi$ , когда

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2},$$

средние давления на поверхности отпечатков должны быть равны.

Для первого шарика среднее давление (т. е. твердость по Мейеру) равно

$$\bar{p}_1 = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{4a_1}{\pi} d_1^{n_1-2} = \frac{4a_1}{\pi} D_1^{n_1-2} \sin^{n_1-2} \frac{\varphi}{2}. \quad (71)$$

Для второго шарика можно написать среднее давление по аналогии. При любом угле вдавливания средние давления должны быть одинаковы, т. е. должно соблюдаться равенство

$$a_1 D_1^{n_1-2} \sin^{n_1-2} \frac{\varphi}{2} = a_2 D_2^{n_2-2} \sin^{n_2-2} \frac{\varphi}{2}.$$

Это возможно только в том случае, если показатели степеней будут равны

$$n_1 = n_2 = n$$

и, кроме того, если множители при степенях синуса будут одинаковыми независимо от диаметра вдавливаемого шарика, т. е. если

$$a_1 D_1^{n-2} = a_2 D_2^{n-2}.$$

Если обозначить произведение  $aD^{n-2}$ , одинаковое для всех шариков, буквой  $A$ , то закон Мейера можно записать в следующем окончательном виде:

$$F = AD^{2-n} d^n = AD^2 \left( \frac{d}{D} \right)^n. \quad (72)$$

Если в формуле (70) коэффициент  $a$  нужно было находить отдельно для каждого шарика, то здесь коэффициент  $A$  является общим для шариков любого диаметра.

Формула Мейера выражает важнейший эмпирический закон в учении о твердости. Большинство авторов, постулируя строгую справедливость этого закона, пытаются построить на нем здание своей теории.

Не следует, однако, забывать, что, во-первых, можно ожидать отступлений от закона при малых углах вдавливания, и, во-вторых, для некоторых веществ (например, марганцовистой аустенитовой стали, некоторых состояний наклепанной меди), у которых в процессе вдавливания наблюдаются фазовые превращения, закон вообще не применим.

#### Зависимость твердостей по Бринеллю и по Мейеру от усилия и от угла вдавливания

Закон Мейера позволяет установить в явном аналитическом виде зависимость твердостей по Бринеллю и по Мейеру от усилия вдавливания. По словам Мура: «Простая формула Мейера, в которой нагрузка для данного шарика и заданного диаметра отпечатка определяется двумя константами, выражающими свойства материала, и постоянство среднего давления  $4F/\pi d^2$  для заданного угла вдавливания шарика бросают лучи света на кажущееся неслучайное изменение числа твердости по Бринеллю при изменении угла вдавливания» [85].

Найдем значение диаметра отпечатка по формуле Мейера (70) и подставим его в формулу, служащую определением твердости по Бринеллю. Мы получим формулу

$$HB = \frac{2}{\pi D} a^{\frac{2}{n}} F^{1 - \frac{2}{n}} \left( D + \sqrt{D^2 - \left(\frac{F}{a}\right)^{\frac{2}{n}}} \right), \quad (73)$$

которая выражает зависимость твердости по Бринеллю от усилия вдавливания.

Если ввести угол вдавливания  $\varphi = 2 \arcsin d/D$  и подставить в формулу Бринелля значение усилия вдавливания по формуле Мейера, получим иную формулу

$$HB = \frac{A \sin^n \frac{\varphi}{2}}{\frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right)}, \quad (74)$$

которая выражает зависимость твердости по Бринеллю от угла вдавливания.

Опыт учит, что в большинстве случаев твердость по Бринеллю имеет максимум при некотором усилии вдавливания. Приведенные формулы позволяют предсказать положение этого максимума. Проще всего исходить из формулы (74). Введем обозначение  $z = \sin^n \frac{\varphi}{2}$ . Тогда

$$HB = \frac{Az}{\frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{z^2}} \right)}. \quad (75)$$

Вычисляем производную твердости по  $z$  и приравниваем ее нулю

$$\frac{dHB}{Adz} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{z^2}} - \frac{\sqrt[n]{z^2}}{n \sqrt{1 - \sqrt[n]{z^2}}}}{\frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{z^2}} \right)^2} = 0.$$

Значение  $z_m$ , при котором твердость имеет максимум, из этого уравнения будет равно

$$z_m = \left[ \frac{\sqrt[n]{n(n-2)}}{n-1} \right]^n,$$

или

$$\frac{d_m}{D} = \frac{\sqrt[n]{n(n-2)}}{n-1},$$

где  $d_m$  — диаметр восстановленного отпечатка, при котором твердость по Бринеллю имеет максимальное значение.

Соответствующее усилие вдавливания можно найти, подставив значение  $d_m$  в формулу Мейера (70):

$$F_m = AD^2 \left[ \frac{\sqrt[n]{n(n-2)}}{n-1} \right]^n = AD^2 \left[ \frac{n}{n-1} \sqrt{1 - \frac{2}{n^2}} \right]^n.$$

Максимальное значение твердости будет равно

$$(HB)_m = \frac{Az_m}{\frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{z_m^2}} \right)} = \frac{2A}{\pi} \frac{\left[ \frac{\sqrt[n]{n(n-2)}}{n-1} \right]^n}{\frac{n-2}{n-1}} = A\psi(n). \quad (76)$$

Эта формула дана Вайценеггером [99]. О'Нейль [86] записывает ее несколько иначе:

$$(HB)_m = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{n}{n-1} \left[ \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{n-2}{2}} = A \psi(n). \quad (77)$$

В табл. 6 указаны значения углов вдавливания  $\varphi_m$  и отношений  $(HB)_m/A$  в зависимости от величины показателя степени в законе Мейера. Выражения твердости по Мейеру даны ниже в табл. 7.

Таблица 6

$n$	$\varphi_m^\circ$	$(HB)_m/A$	$n$	$\varphi_m^\circ$	$(HB)_m/A$
2,0	0	1,2732	2,3	80,0	0,9848
2,1	49,3	1,1133	2,4	88,6	0,9462
2,2	67,4	1,0367	2,5	96,8	0,9160

### Кривая твердости

Будем вдавливать в плоскую поверхность испытуемого тела очень твердый шарик, модуль упругости которого в идеальном случае должен быть бесконечно велик. По усилию вдавливания и диаметру соответствующего отпечатка вычислим среднее давление на поверхности отпечатка, которое характеризует сопротивление вещества тела вдавливанию шарика. Начертим график зависимости среднего давления от усилия вдавливания (рис. 8).

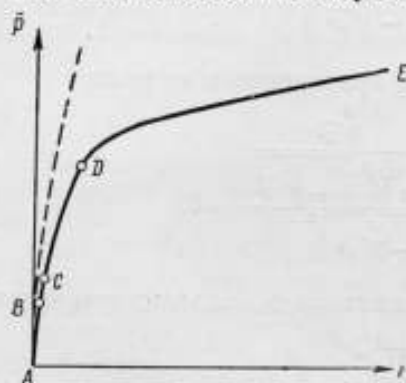


Рис. 8. Кривая твердости.  
Штриховая линия — по Герцу.

Кривая  $ABCDE$  может быть названа «кривой твердости» при вдавливании шарика данного диаметра. (Лучше было бы строить кривую зависимости среднего давления от степени нагружения шарика!) Если вещество подчиняется закону Гука, то формула Гука при задании значений модуля упругости и коэффициента Пуассона позволяет построить теоретическую кривую для упругого вдавливания. Реальная кривая совпадает с этой кривой Герца только на небольшом начальном участке до точки  $B$ . На кривой  $ABCDE$  можно выделить четыре точки: точку  $B$ , в которой кривая отклоняется от кривой Герца; точку  $C$ , соответствующую появлению пластического отпечатка; точку  $D$ , в которой крутой начальный подъем кривой сменяется медленным нарастанием; точку  $E$ , соответствующую концу кривой, т. е. разрушению испытуемого тела. Точка  $B$  может быть названа границей пропорциональности, точка  $C$  — границей упругости, точка  $D$  — границей текучести. Кривая на участке  $DE$  монотонно возрастает, не имея максимума, т. е. она совершенно аналогична кривой действительных напряжений при одноосном растяжении. Кривая твердости отличается от кривой растяжения, во-первых, в том отношении, что она простирается значительно дальше границы текучести, потому что даже хрупкие тела становятся пластичными под большим всесторонним давлением; во-вторых, точка окончания кривой твердости

оказывается недоступной для большинства веществ, кроме некоторых сортов стекла. Во всех опытах Мейера вдавливание заканчивалось разрушением шарика (растрескиванием по горизонтальной плоскости, проходящей через центр), а не пластинки.

Обсудим, как отражаются на кривой твердости упругие и пластические деформации шарика. Если твердость шарика выше твердости испытуемого вещества, так что при испытаниях шарик всегда испытывает только упругие деформации, то в процессе вдавливания мы будем иметь дело как бы с вдавливанием тел разной формы. Форма однозначно определяется величиной приложенной нагрузки. На участке *AC* упругие деформации шарика имеют тот же порядок величины, что и упругие деформации испытуемой плитки, поэтому этот участок будет особенно сильно искажен. Чем дальше мы будем отходить от точки *D*, тем меньшую роль будут играть незначительные упругие деформации шарика по сравнению с большими пластическими деформациями пластинки и тем лучше будет совпадать опытная кривая с теоретической кривой *ABCDE* для абсолютно жесткого шарика.

Результаты измерения твердости вдавливанием шарика на участке *DE* не зависят от материала, из которого изготовлен шарик, если при вдавливании шарик не претерпевает пластических деформаций.

Если вдавливаемый шарик будет иметь ту же твердость, что и испытуемое тело, то пластические деформации шарика и тела будут иметь одинаковый порядок величины. Мысленно, как и раньше, мы можем рассматривать процесс испытания как вдавливание наконечника переменной формы, зависящей от приложенного усилия, однако опытная кривая в этом случае будет сильно отличаться от кривой *ABCDE*. Кривизна поверхности шарика при его сплющивании уменьшается, а диаметр отпечатка увеличивается. Среднее давление под сплюснутым шариком всегда будет меньше, и опытная кривая будет во всех своих точках лежать ниже теоретической кривой *ABCDE*. Этот вывод справедлив при любой форме наконечника. Им, в частности, объясняется, почему твердость, определяемая методами сдавливания двух тел из испытуемого материала (например метод сдавливания скрещенных прутков по Фепплю), всегда оказывается ниже твердости по Бринеллю.

Если бы воображаемое абсолютно твердое тело, вдавливаемое в испытуемое вещество, имело форму, отличную от шаровой, то результаты опытов выразились бы иной кривой, которая до границы пропорциональности также может быть вычислена по формулам Герца.

### Критика твердости по Герцу

Е. Мейер критикует понятие твердости по Герцу следующим образом. По определению Г. Герца твердость измеряется давлением в центре круглой площадки соприкосновения, когда в процессе вдавливания предел упругости будет превзойден в какой-либо точке тела. Эта твердость равна полуторной ординате точки *C* на рис. 8. Герц выделяет, таким образом, только одну точку на всей кривой. Основанием для формулировки Герца служили опыты над некоторыми сортами стекла, которые как раз составляют исключение. Для материалов, применяемых в машиностроении, невозможно установить момент превышения предела упругости по образованию трещины. О твердости таких материалов следует судить не по исчезающим упругим отпечаткам, а по остающимся пластическим отпечаткам. Сразу же после выхода за предел упругости два вещества *I* и *II* с одинаковыми упругими свойствами могут начать сильно различаться по своим пластическим свойствам (рис. 9). Штрибек нашел, например, что одна

из исследованных им специальных сталей имела предел упругости, одинаковый с мягким железом, равный  $20 \text{ кгс/мм}^2$ . Эту очень твердую по производственным понятиям сталь пришлось бы считать по Герцу имеющей одинаковую твердость с мягким железом. Все приведенные соображения говорят против применения пределов упругости и текучести для характеристики твердости. Для оценки последней надо использовать участок кривой  $DE$  рис. 8, относящийся к пластическим деформациям.

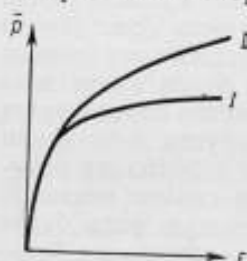


Рис. 9. Кривые твердости двух разных металлов.

### Твердость не выражается одним числом

На участке  $DE$  кривой (рис. 8) нет каких-либо отдельных выдающихся точек, и поскольку выделение какой-либо точки было бы связано со значительным произволом, необходимо признать, что твердость вещества при вдавливании можно характеризовать только ходом всего участка пластических деформаций на кривой твердости  $ABCDE$ , а не одним единственным числом. Совершенно так же результаты испытания на растяжения не могут быть выражены каким-либо одним числом, а требуют знания всей кривой «напряжение — деформация», или, по крайней мере, указания нескольких чисел, относящихся к характерным точкам кривой (пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности).

С теоретической точки зрения твердость данного вещества можно исчерпывающе охарактеризовать указанием многих кривых твердости, относящихся к случаю вдавливания тел разной геометрической формы. С практической точки зрения приходится путем стандартизации условий опыта выбирать для числовой характеристики твердости одну точку на одной из кривых.

Задача науки состоит в сведении кривых для разных наконечников у данного вещества к одной кривой для какого-либо одного наконечника и, может, быть, к немногим константам, описывающим простейшие процессы деформации этого вещества. Решение задачи крайне осложнено как из-за математических трудностей при наличии протяженных поверхностей и конечных деформаций, так и из-за недостаточной изученности сложных процессов пластических деформаций. Для случая вдавливания шариков разного диаметра Мейеру удалось введением двух констант охватить кривые вдавливания всех шариков, что, конечно, не исчерпывает всей задачи.

### Сравнение твердостей

Количественное сравнение твердостей требует обязательного соглашения об условиях измерения сравниваемых величин, в противном случае оно становится неоднозначным.

Предположим, что речь идет о сравнении твердостей по Мейеру двух разных материалов. Возможны два случая сравнения твердостей, измеренных разными шариками: 1) при одинаковом угле вдавливания и 2) при одинаковых степенях нагружения.

В табл. 7 приведены результаты сравнения твердостей в обоих случаях, причем для числового примера использовано сравнение твердостей железа и меди. При обычном угле вдавливания  $44^\circ$  ( $\varphi = 2 \arcsin 0,375$ ) медь тверже железа, при степени нагружения 10, наоборот, железо тверже меди.

Таблица 7

Условия сравнения	Формула для $HM$	Результат сравнения при заданном $D$	
		$n_1 \neq n_2$	Fe: $n_1 = 2,16$ ; $A_1 = 94$ ; Cu: $n_2 = 2,01$ ; $A_2 = 83$
$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2}$	$\frac{4}{\pi} A \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2}$	$\frac{(HM)_1}{(HM)_2} = \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^{n_1-n_2}$	0,977 $\left(\frac{d}{D} = 0,375\right)$
$\frac{F_1}{D_1^2} = \frac{F_2}{D_2^2}$	$\frac{4}{\pi} A^{\frac{2}{n}} \left(\frac{F}{D^2}\right)^{\frac{n-2}{n}}$	$\frac{(HM)_1}{(HM)_2} = \frac{A_1^{\frac{2}{n_1}} \left(\frac{F_1}{D_1^2}\right)^{\frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2}}}{A_2^{\frac{2}{n_2}} \left(\frac{F_2}{D_2^2}\right)^{\frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_1}}}$	1,123 $\left(\frac{F}{D^2} = 10\right)$

## 9. ТВЕРДОСТЬ ПО МАРТЕНСУ — ГЕЙНУ (1908 г.)

Твердость по Бриеллю определяется выражением, в знаменателе которого диаметр шарика играет роль произвольной постоянной, потому что действительный диаметр кривизны восстановленного отпечатка  $2q$  есть величина, зависящая от нагрузки. При помощи специально сконструированного прибора для измерения глубины отпечатка Мартенс и Гейн [83] установили, что усилие вдавливания  $F$  при небольших углах вдавливания прямо пропорционально глубине восстановленного отпечатка

$$F = kh. \quad (78)$$

Из геометрических соображений радиус кривизны  $q$  поверхности восстановленного отпечатка связан с диаметром отпечатка  $d$  и его глубиной соотношением

$$\frac{d^2}{4} = h(2q - h). \quad (79)$$

Усилие вдавливания можно выразить как произведение среднего давления  $\bar{p}$  на площадь проекции отпечатка:

$$F = \bar{p} \frac{\pi d^2}{4}.$$

Подставляя сюда значение  $d^2/4$  из формулы (79), получим

$$F = \bar{p}\pi h(2q - h) \approx \bar{p}2\pi qh.$$

На участке пропорциональности  $F$  и  $h$ , очевидно, должно соблюдаться соотношение

$$\bar{p}q = \text{const}, \quad (80)$$

которое, по мнению авторов, «аналогично закону Бойля — Мариотта». Если учесть зависимость среднего давления от диаметра отпечатка, то этот эмпирический закон Мартенса — Гейна получит такой вид:

$$\frac{Fq}{d^2} = \text{const}. \quad (81)$$

В противоположность Е. Мейеру, который считал необходимым ввести в рассмотрение всю кривую твердости, Мартенс и Гейн предложили ограничиться начальным участком кривой, где отношение  $F/h$  остается постоянной величиной. Эксперименты с вдавливанием 5-мм шарика

в разные металлы показали, что пропорциональность во всех случаях наблюдается, пока глубина отпечатка не превышает 0,05 мм. При дальнейшем увеличении усилия кривая  $F(h)$  отклоняется чаще всего вверх и значительно реже вниз.

Твердость по Мартенсу — Гейну определяется поэтому как усилие вдавливания шарика диаметром 5 мм, необходимое для получения восстановленных отпечатков глубиной 0,05 мм.

Из формул (78) и (81) Мартенса — Гейна чаще всего применялась первая.

#### 10. ТЕОРИЯ ТЭЙБОРА (1948 г.)

Теория Тэйбора, изложенная в статье [95] и книге [97], основана на следующих общих представлениях.

При вдавливании твердого шарика в поверхность более мягкого металла вначале происходит упругая деформация. При увеличении нагрузки наступит момент, когда максимальные касательные напряжения превзойдут предел упругости и под шариком начнется пластическая деформация. Это произойдет, когда среднее давление на поверхности вдавливания достигнет величины  $1,1\sigma_s$ , где  $\sigma_s$  — предел текучести или предел упругости металла. Пластическая деформация будет при этом наблюдаться в очень малой области под центром круга соприкосновения. При дальнейшем увеличении нагрузки среднее давление возрастает, а область пластических деформаций увеличивается до тех пор, пока весь материал вокруг поверхности соприкосновения не потечет. В этот момент среднее давление достигает  $3\sigma_s$ . При последующем увеличении нагрузки шарик будет погружаться дальше, но среднее давление будет оставаться прежним, порядка  $3\sigma_s$ . Так обстоит дело при отсутствии упрочнения. Если при вдавливании металл будет упрочняться, то эффективное значение предела текучести на каком-либо из этапов процесса будет значительно выше предела текучести в начале вдавливания. Таким образом в самом общем случае на результат измерения твердости по Бринеллю одновременно влияют два процесса: во-первых, увеличение предела упругости по мере вдавливания, во-вторых, возрастание среднего давления при переходе от начала пластических деформаций к полной пластичности.

В большинстве случаев измерения твердости по Бринеллю производятся в области полной пластичности, так что основной причиной возрастания среднего давления оказывается упрочнение металла. Степень упрочнения зависит от деформации при вдавливании, которая может быть оценена в зависимости от относительных размеров отпечатка. По опытам Тэйбора, эффективная деформация приблизительно равна  $0,2d/D$ . Увеличение предела текучести в зависимости от размера отпечатка можно предвычислить на основе знания кривой растяжения. Подробный анализ объясняет эмпирический закон Мейера и показывает, что показатель  $n$  закона Мейера связан с показателем  $x$  кривой истинных напряжений соотношением  $n = x + 2$ .

После прекращения пластического течения и достижения равновесия вся нагрузка будет уравновешена упругими напряжениями в материале. Если снять нагрузку, произойдет упругое «восстановление» отпечатка, и его форма изменится. Если затем повторно приложить первоначальную нагрузку, поверхности отпечатка и шарика упруго деформируются и приобретут ту же форму, как и при первом приложении нагрузки. Упругие напряжения вокруг отпечатка достигнут при этом величины, при которой материал еще не будет пластически деформирован. Если нагрузку удалить или уменьшить, упругие напряжения исчезнут или



соответственно уменьшатся. Если нагрузку, наоборот, увеличить, то напряжения выйдут за предел текучести и начнется дальнейшее пластическое течение металла. Размеры отпечатка начнут увеличиваться, металл будет упрочняться до тех пор, пока напряжения на поверхности увеличенного отпечатка вновь не станут меньше возросшего предела текучести. Рассмотрим теперь подробнее отдельные положения теории Тэйбора, которая довольно хорошо согласуется с опытом.

### Наступление пластической деформации

При отсутствии нагрузки идеально гладкий шарик, лежащий на идеальной плоской поверхности, соприкасается с плоскостью в одной точке. При приложении нагрузки, перпендикулярной к плоскости, соприкосновение будет иметь место на некоторой поверхности касания, ограниченной окружностью, диаметр которой прямо пропорционален корню кубическому из величины нагрузки. Кривизна поверхности соприкосновения является промежуточной между кривизнами шарика и плоскости. Пока усилие вдавливания не превосходит некоторой определенной величины, деформация остается упругой, и после устранения нагрузки на поверхности тела не остается никаких следов. Теоретический анализ

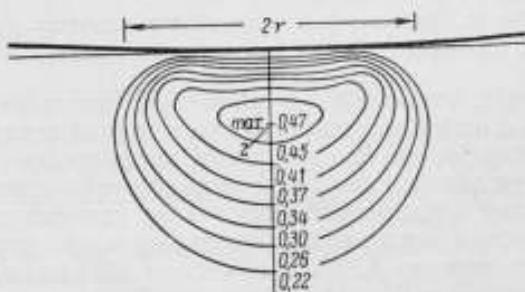


Рис. 10. Распределение касательных напряжений при вдавливании шарика в упругое тело.

позволяет указать картину распределения касательных напряжений при вдавливании шарика в упругое тело (рис. 10). Замкнутые кривые соединяют точки в теле, в которых касательные напряжения составляют заданную долю среднего давления на круге касания. Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max} = 0,47\bar{p}$  наблюдается в точке Z на глубине примерно половины радиуса круга касания (вычисления проведены для  $\nu = 0,3$ ). Так как в этой точке два радиальных напряжения равны, то по условию Губера — Мизеса пластическое течение начнется, когда касательное напряжение будет равно половине предела текучести при одноосном растяжении, т. е.

$$0,47\bar{p} = 0,5\sigma_s,$$

или иначе

$$\bar{p} \approx 1,1\sigma_s. \quad (82)$$

Формула Герца для среднего давления на круге касания позволяет найти ту минимальную нагрузку  $F_p$ , при которой наступает пластическое течение,

$$F_p = 17,2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2 R^2 \sigma_s^3. \quad (83)$$

Пока нагрузка меньше  $F_p$ , деформация остается упругой, при  $F = F_p$  пластическая деформация происходит только в точке Z, при  $F > F_p$  пластическая деформация происходит в области под шариком. Пластическая деформация металла сопровождается упрочнением. Возможны два крайних случая:

1. У отожженного металла в области пластических деформаций происходит упрочнение и становится легче смещать металл ниже этой области.

Вблизи отпечатка образуется впадина, окаймленная еле заметным кольцом поднятого материала вдали от отпечатка (рис. 11, а).

2. У наклепанного металла, у которого в области пластических деформаций не происходит заметного упрочнения, пластическое течение происходит в области больших касательных напряжений, и вокруг отпечатка образуется приподнятый валик-наплыв (рис. 11, б).

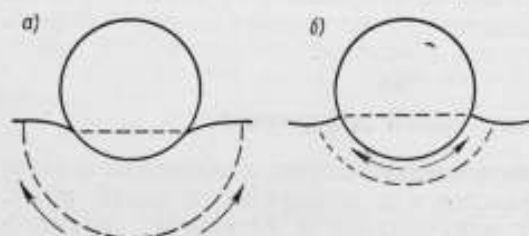


Рис. 11. Деформации металла вблизи отпечатка. а — отожженный металл, б — наклепанный металл.

круг отпечатка не придет в состояние пластичности. Это состояние «полной пластичности» очень трудно поддается определению. Проще всего считать, что оно наступает, когда среднее давление будет мало изменяться при дальнейшем увеличении размеров отпечатка. Линии скольжения покрывают тогда всю область вокруг вдавливаемого сегмента шарика. Теоретический анализ вдавливания шарика в идеально пластический материал был произведен А. Ю. Ишлинским [30] на основе применения критерия пластичности Хаара — Кармана. Хотя этот критерий не является физически правильным, он позволяет, все же, получить в первом приближении картину распределения давления на площади контакта (рис. 12). Пунктирная кривая построена для сравнения по формуле Герца.

Теоретически среднее давление не зависит от размеров отпечатка и равно 2,66-кратному пределу текучести. Среднее давление на площади контакта цилиндрического плоского штампа теоретически равно 2,84-кратному пределу текучести. Можно считать, что в широких пределах изменения условий вдавливания среднее давление заключено между  $2,6 \sigma_s$  и  $2,9 \sigma_s$ . Это соотношение имеет место при отсутствии трения между наконечником и металлом. Наличие трения повышает, естественно, среднее давление.

Сильно наклепанные металлы не способны к дальнейшему упрочнению и их можно рассматривать как идеально пластические материалы. Опыты Тэйбора по вдавливанию стальных шариков в такие металлы (сплав Те—Рб, Al, Cu, мягкая сталь) показали, что для них при больших углах вдавливания отношение  $\bar{p}/\sigma_s$  действительно близко по величине к 3 (точнее, заключено в пределах 2,8÷2,9).

#### Характеристическая кривая «среднее давление — нагрузка»

Зависимость среднего давления от усилия вдавливания, или, иначе говоря, зависимость твердости по Мейеру от усилия вдавливания, изображается характеристической кривой, которая в свое время была названа Е. Мейером кривой твердости.

#### Состояние полной пластичности

По мере увеличения усилия вдавливания область пластических деформаций растет и среднее давление увеличивается до тех пор, пока весь материал во-

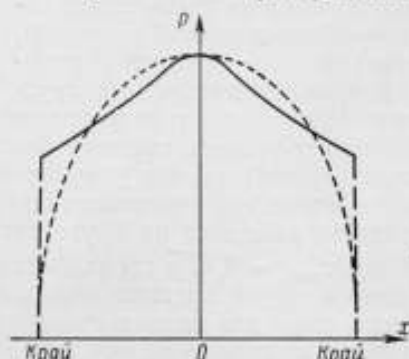


Рис. 12. Распределение давления на площади контакта.

Пунктирная линия — упругое тело, сплошная линия — идеально пластическое тело.

Вид этой кривой для идеально пластичного материала можно предсказать теоретически (рис. 13). На участке  $OL$  деформации являются упругими и, в соответствии с теорией Герца, среднее давление возрастает пропорционально кубическому корню из усилия вдавливания (пунктирная линия на рис. 13). Точка  $L$  соответствует началу пластических деформаций, когда  $p = 1,1 \sigma_s$ . Участок  $LM$  служит переходным от «участка упру-

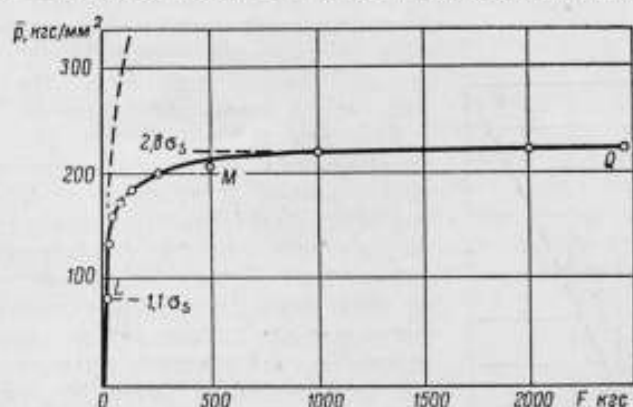


Рис. 13. Зависимость среднего давления от усилия вдавливания.

ги  $OL$ » к «участку полной пластичности  $MQ$ ». На участке полной пластичности среднее давление изменяется незначительно и близко к 3-кратному пределу текучести. Точки на графике нанесены по результатам опытов Тэйбора по вдавливанию шарика диаметром 10 мм в наклепанную мягкую сталь.

В табл. 8 приведены данные, служившие для построения графика. Во 2-й графе показано отношение усилия вдавливания к усилию, при котором впервые начинается пластическая деформация. В 4-й графе указано отношение среднего давления на отпечатке при данном усилии вдавливания к среднему давлению  $\bar{p}_q$ , измеренному при большом усилии вдавливания, когда состояние полной пластичности уже наступило.

Таблица 8

Нагрузка $F$ , кгс	$F/F_p$	Среднее давление $\bar{p}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$\bar{p}/\bar{p}_q$
1	2	3	4
2 (= $F_p$ )	1	84	1 : 2,55
5	2,5	105	1 : 2,05
10	5	120	1 : 1,8
20	10	142	1 : 1,5
40	20	160	1 : 1,35
80	40	180	1 : 1,2
125	62	186	1 : 1,17
250	125	200	1 : 1,08
500	250	210	1 : 1,03
700	350	216	1 : 1
2000	1000	220 (= $\bar{p}_q$ )	1 : 1

### Область применимости закона Мейера

Особенно поучительно сопоставить с характеристической кривой (рис. 13) график зависимости усилия вдавливания от диаметра отпечатка, выполненный в логарифмических координатах (рис. 14). Прямая  $OLN$  соответствует формулам Герца для упругого вдавливания. Ее угловой коэффициент равен 3. Точка  $L$  отмечает начало пластических деформаций.

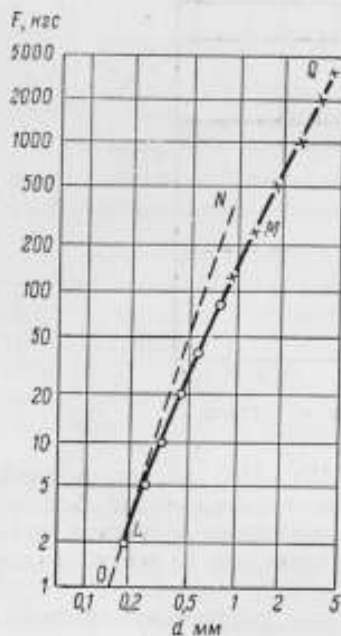


Рис. 14. Зависимость усилия вдавливания от диаметра отпечатка.

Прямая  $OLN$  — по Герцу, кривая  $OQ$  — по результатам опытов.

Искривленный участок  $LM$  служит переходным от «участка упругости  $OL$ » к «участку полной пластичности  $MQ$ ». На переходном участке угловой коэффициент изменяется в пределах  $2,7 \div 2,25$ . На участке полной пластичности он принимает постоянное значение, равное 2. Угловой коэффициент кривой есть показатель степени в законе Мейера. Закон можно считать справедливым, когда показатель степени является постоянным, не зависящим от размеров отпечатка. В рассматриваемом случае закон применим при условиях вдавливания, превышающих усилие вдавливания в точке  $M$ , лежащей в начале участка полной пластичности. Усилие вдавливания в точке  $M$  превышает усилие вдавливания в точке  $L$  в  $100 \div 200$  раз, в среднем в 150 раз.

В табл. 9 даны значения усилий, при которых появляется первый пластический отпечаток и при которых наступает состояние полной пластичности для материалов, исследованных Тэйбором. Диаметр шарика принят равным 10 мм.

Для очень мягкого сплава теллура со свинцом первый пластический отпечаток появляется при усилии вдавливания всего только в 2 кгс и состояние полной пластичности, при котором вступает в силу закон Мейера, наступает уже при усилии вдавливания равном 300 кгс. Для очень твердой стали закон Мейера становится пригодным только начиная с усилия вдавливания в 5200 кгс, при котором образуется отпечаток диаметром около 3 мм.

Для отожженных металлов, способных к значительному упрочнению, общая картина сохраняется. При очень малых усилиях вдавливания,

Таблица 9

Наклепанный металл	Модуль упругости $E$ , кгс/мм <sup>2</sup>	Предел текучести $\sigma_y$ , кгс/мм <sup>2</sup>	Усилие вдавливания для	
			образования первого пластического отпечатка $F_p$ , кгс	наступления полной пластичности $F_q$ , кгс
Сплав Те — Рь . . . . .	$1,6 \cdot 10^3$	2,1	0,002	0,3
Медь . . . . .	$1,2 \cdot 10^4$	31	0,23	35
Мягкая сталь . . . . .	$2,0 \cdot 10^4$	65	1,2	180
Легированная сталь	$2,0 \cdot 10^4$	130	9,8	1500
Очень твердая сталь	$2,0 \cdot 10^4$	200	35,0	5200

когда деформации остаются упругими, показатель закона Мейера имеет свое верхнее предельное значение, равное 3. При увеличении усилий показатель уменьшается до тех пор, пока он не достигнет постоянного значения, характеризующего состояние упрочнения металла.

### Вывод закона Мейера

При вдавливании шарика материал вокруг отпечатка подвергается пластической деформации, что приводит к упрочнению материала, т. е. к повышению предела текучести. В разных точках вокруг отпечатка степень деформации будет различной, и предел текучести будет в этих точках неодинаковым. В силу закона подобия поле деформаций и напряжений вокруг отпечатка однозначно определяется отношением диаметра отпечатка к радиусу кривизны его поверхности. Это отношение без существенной погрешности в вычислениях можно заменить отношением  $d/D$ .

В состоянии полной пластичности среднее давление на отпечатке будет пропорционально некоторому эффективному пределу текучести  $Y$ :

$$\bar{p} = cY,$$

где  $c$  — постоянный множитель, близкий к 3.

Эффективный предел текучести следует рассматривать как функцию некоторой эффективной деформации  $\epsilon$ :

$$Y = \Phi(\epsilon).$$

Если металл был отожжен и деформация создавалась исключительно вдавливанием шарика, то эффективная деформация будет функцией отношения  $d/D$ :

$$\epsilon = f\left(\frac{d}{D}\right).$$

Если металл до вдавливания подвергался наклепу, то полная эффективная деформация будет равна сумме предварительной деформации  $\epsilon_0$  и деформации при вдавливании:

$$\epsilon = \epsilon_0 + f\left(\frac{d}{D}\right).$$

Таким образом в общем случае среднее давление (или твердость по Мейеру) может быть представлена в таком виде:

$$\bar{p} = HM = c\Phi\left[\epsilon_0 + f\left(\frac{d}{D}\right)\right] = \psi\left(\frac{d}{D}\right).$$

Для отожженного металла  $\epsilon_0 = 0$ , а эффективная деформация, как показали специальные опыты, прямо пропорциональна отношению  $d/D$ :

$$\epsilon = \alpha\left(\frac{d}{D}\right)^*.$$

Зависимость предела текучести от деформации (истинного напряжения от удлинения) у многих металлов можно выразить степенной функцией (Надан, 1931):

$$Y = be^x. \quad (84)$$

Объединяя последние две формулы, получим

$$Y = b\alpha^x\left(\frac{d}{D}\right)^x.$$

\* Если выразить деформацию в процентах, то  $\alpha \approx 20$ .

Подставляя это значение в формулу для среднего давления, найдем

$$HM = \frac{4F}{\pi d^2} = cY = cba^x \left(\frac{d}{D}\right)^x.$$

Отсюда вытекает выражение для силы в зависимости от относительного диаметра отпечатка

$$F = \left(\frac{\pi}{4} cba^x\right) D^2 \left(\frac{d}{D}\right)^{x+2}, \quad (85)$$

которое после введения обозначений

$$A = \frac{\pi}{4} cba^x, \quad n = x + 2$$

приобретает знакомый вид закона Мейера:

$$F = AD^2 \left(\frac{d}{D}\right)^n.$$

Связь между показаниями  $x$  и  $n$  кривых одноосного растяжения и вдавливания шарика хорошо подтверждается имеющимися опытными данными. Формула О'Нейля  $n = 2x + 2$  приводит к значительно худшему согласию с опытом.

#### Обратимость восстановления отпечатка

Восстановленный отпечаток имеет радиус кривизны, больший радиуса шарика. Если процесс восстановления является процессом освобождения материала вокруг отпечатка от упругих напряжений, то он должен быть обратимым, т. е. повторное приложение нагрузки

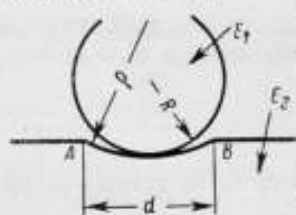


Рис. 15. Шарик в лунке.

должно переводить восстановленный отпечаток в первичный невосстановленный, а размеры вторичного восстановленного отпечатка должны совпадать с размерами первичного восстановленного отпечатка. Тэйбор [94] проверил обратимость восстановления отпечатков шарика прямыми опытами. Диаметры восстановленных отпечатков воспроизводились с погрешностью порядка 1%; радиусы кривизны, измеренные на диаметральном разрезе отпечатка или на самом отпечатке с помощью профилометра, совпадали с погрешностью около 4%.

Поскольку обратимость восстановления можно считать доказанной, к процессу восстановления применимы формулы Герца для вдавливания шарика радиуса  $R$  в лунку радиуса  $q$  (радиус восстановленного отпечатка). При повторном приложении нагрузки края отпечатка коснутся поверхности шарика (рис. 15). Формула для диаметра площадки контакта дает соотношение между  $R$  и  $q$ :

$$d = \left[ \frac{qR}{q-R} 6F \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (86)$$

Нетрудно найти величину вертикального зазора между краями отпечатка и свободно лежащим в нем шариком. По теореме о равенстве произведений отрезков двух пересекающихся хорд имеем для отпечатка  $d^2/4 \approx 2qh$ , для сегмента шарика с основанием, равным проекции отпечатка,

$d^2/4 \approx 2RH$ . Искомый зазор есть разность высоты сегмента шарика и глубины восстановленного отпечатка

$$\Delta h = H - h \approx \frac{d^2}{8} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (87)$$

Величина в круглых скобках формулы (87) может быть найдена из формулы (86). Имеем

$$\Delta h \approx \frac{3}{4} \frac{F}{d} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right). \quad (88)$$

Если принять  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  и учесть, что  $F = \bar{p} \frac{\pi d^2}{4}$ , то

$$\Delta h \approx 0,536 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \bar{p} d. \quad (89)$$

### Твердость по Бринеллю и предел прочности

Зависимость истинного напряжения от удлинения приближенно может быть выражена степенной формулой (84).

В процессе пластической деформации не происходит изменения объема образца, поэтому при увеличении длины в  $(1 + \epsilon)$  раз поперечное сечение должно уменьшиться до  $1/(1 + \epsilon)$  доли первоначальной величины. С учетом этих соотношений уравнение кривой условных напряжений будет

$$\sigma = \frac{b\epsilon^x}{1 + \epsilon}. \quad (90)$$

Предел прочности  $\sigma_n$  есть напряжение, соответствующее максимуму на кривой условных напряжений. Дифференцируя  $\sigma$  по  $\epsilon$  и приравнявая производную нулю, получим

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{bx\epsilon^{x-1}}{1 + \epsilon} - \frac{b\epsilon^x}{(1 + \epsilon)^2} = 0, \quad (91)$$

откуда  $\epsilon_n = x/(1 - x)$ . Подставляя это значение вместо  $\epsilon$  в формулу (90), найдем предел прочности:

$$\sigma_n = b(1 - x) \cdot \left( \frac{x}{1 - x} \right)^x. \quad (92)$$

Если в формуле (92) выразить  $b$  и  $x$  через постоянные закона Мейера, то получим предел прочности в ином виде:

$$\sigma_n = \frac{4}{\pi} \frac{A}{c\alpha^{n-2}} (3 - n) \cdot \left( \frac{n-2}{3-n} \right)^{n-2}. \quad (93)$$

Найдем теперь выражение для твердости по Бринеллю. При заданном относительном диаметре отпечатка  $d/D$  имеем соотношение между твердостью по Бринеллю и твердостью по Мейеру

$$HB = HM \cos^2 \frac{\varphi}{4},$$

где  $\varphi$  — угол вдавливания.

Твердость по Мейеру, т. е. среднее давление на поверхности отпечатка, примерно в 2,8 раза больше эффективного предела текучести:  $HM \approx 2,8Y$ . Эффективный предел текучести выражается через эффективную деформацию формулой (84). Последняя, если выразить ее в процентах, определяется умножением числа 20 на относительный диаметр отпечатка, т. е.

$100 \varepsilon = 20 (d/D)$ . После выполнения всех необходимых подстановок найдем

$$HB = 2,8b \left( \frac{0,2d}{D} \right)^x \cos^2 \frac{\varphi}{4}. \quad (94)$$

Отношение предела прочности к твердости по Бригеллю равно

$$\frac{\sigma_B}{HB} = \frac{1-x}{2,8 \cos^2 \frac{\varphi}{4}} \left( \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{D} \right)^x. \quad (95)$$

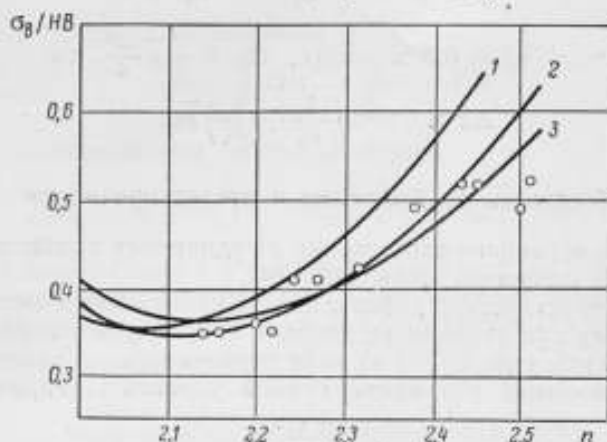


Рис. 16. Отношение предела прочности к твердости по Бригеллю.

1)  $d/D = 0,3$ ; 2)  $d/D = 0,5$ ; 3)  $d/D = 0,7$ .

Тэйбор построил кривые  $\sigma_B/HB$  в зависимости от показателя упрочнения  $x = n - 2$  для трех относительных диаметров отпечатков. Уравнения кривых

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_B}{HB} &= \frac{1-x}{2,73} \left( \frac{16,7x}{1-x} \right)^x \quad \text{при } \frac{d}{D} = 0,3 \\ \frac{\sigma_B}{HB} &= \frac{1-x}{2,61} \left( \frac{10x}{1-x} \right)^x \quad \text{при } \frac{d}{D} = 0,5 \\ \frac{\sigma_B}{HB} &= \frac{1-x}{2,40} \left( \frac{7,14x}{1-x} \right)^x \quad \text{при } \frac{d}{D} = 0,7 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Сопоставление с опытными данными, собранными из литературы (рис. 16), показало удовлетворительное согласие теории и эксперимента. Относительные диаметры отпечатков для каждой из точек не были указаны авторами работ, однако точки для всех металлов, кроме никеля и аустенитовой стали, легли в область между кривыми.

#### Выбор материала для шарика

Предположим, что среднее давление для достижения состояния полной пластичности материала шарика равно  $(HM)_1 \approx 2,8 \sigma_{s1}$ , а эта же величина для испытуемого тела равна  $(HM)_2 \approx 2,8 \sigma_{s2}$  ( $\sigma_{s2} < \sigma_{s1}$ ). Пластическая деформация тела начинается при среднем давлении  $p \approx 1,1 \sigma_{s2}$ . Поскольку  $\sigma_{s1} > \sigma_{s2}$ , это давление не может вызвать пластической деформации шарика. При увеличении усилия вдавливания среднее давление достигнет  $2,8 \sigma_{s2}$  и не превысит этого значения в дальнейшем. Для того чтобы шарик



не претерпевал заметных пластических деформаций, необходимо соблюсти неравенство

$$2,8\sigma_{s_2} < 1,1\sigma_{s_1}$$

Отсюда

$$\sigma_{s_1} > 2,5\sigma_{s_2}$$

и, следовательно,

$$(HM)_1 > 2,5(HM)_2$$

В первом приближении твердость по Мейеру можно считать совпадающей с твердостью по Бринеллю. Условие отсутствия пластических деформаций шарика можно поэтому сформулировать как следующее соотношение твердостей по Бринеллю:

$$(HB)_1 > 2,5(HB)_2 \quad (97)$$

Шариком с твердостью  $(HB)_1 = 900$  можно, например, испытывать тела с твердостью не свыше  $(HB)_2 = 900/2,5 \approx 400$ .

Неравенство (97) имеет широкое поле применения. Для того чтобы при контакте одного тела с другим первое тело не претерпевало пластических деформаций, его твердость должна быть в 2,5 раза больше твердости второго тела.

#### Выбор нагрузки для испытания очень твердых материалов

При измерении твердости по Бринеллю очень твердых материалов обычно применяют 10-мм шарик под нагрузкой 3000 кгс.

Результаты, начиная с  $HB = 300$ , становятся, как известно, меньше соответствующих чисел твердости по Виккерсу. Обычно эти расхождения приписывают деформациям стального шарика, однако такое объяснение неприменимо для измерений с шариком из карбида вольфрама ( $HB \approx 1500$ ) и алмаза ( $HB \approx 6000$ ), которые, все-таки, дают, начиная с  $HB \approx 550$ , числа ниже чисел по Виккерсу (табл. 10).

По Тэйбору отпечатки шарика при нагрузке 3000 кгс недостаточно велики для того, чтобы наступало состояние полной пластичности. Для доказательства он обращается к характеристической кривой вдавливания 10-мм шарика в образец наклепанной мягкой стали (табл. 10).

Таблица 10

HV, кгс/мм <sup>2</sup>	HB, кгс/мм <sup>2</sup>				Алмазный шарик, *** D = 1 мм, F = 30 кгс	
	Стальной шарик, * D = 10 мм, F = 3000 кгс		Шарик из карбида вольфрама, ** D = 10 мм, F = 3000 кгс		наблюдено	вычислено
	наблюдено	вычислено	наблюдено	вычислено		
130	130	130	130	130	130	130
305	302	305	302	305	304	305
400	388	390	388	400	400	400
550	495	500	525	520	530	535
750	600	620	680	670	—	680
1000	710	—	810	800	900	850
1200	780	—	870	890	—	930

\*  $E_s = 2 \cdot 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>;  $(HB)_1 = 500$ .

\*\*  $E_s = 6 \cdot 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>;  $(HB)_1 = 1,5 \cdot 10^4$ ;  $F_D = 90$  кгс.

\*\*\*  $E_s = 1 \cdot 10^5$  кгс/мм<sup>2</sup>;  $(HB)_1 = 6 \cdot 10^4$ ;  $F_D = 72$  кгс.

Вычисленные значения  $HV$ , указанные в табл. 10, находились следующим образом. Пусть, например, истинная твердость образца равна  $1000 \text{ кгс/мм}^2$ . Для шарика из карбида вольфрама нагрузка, при которой начинаются пластические деформации, равна  $F_p = 90 \text{ кгс}$ . Нагрузка вдавливания при измерении  $3000 \text{ кгс}$  в 33 раза больше  $F_p$ , чему на характеристической кривой соответствует отношение средних давлений  $\bar{p}/\bar{p}_p = 0,800$ . Ожидаемый (т. е. вычисленный) результат измерения должен быть равен  $1000 \times 0,800 \approx 800 \text{ кгс/мм}^2$ . Опытное значение равно  $810 \text{ кгс/мм}^2$ .

Для алмазного шарика  $F_p = 72 \text{ кгс}$ . Нагрузка  $3000 \text{ кгс}$  в 42 раза больше  $F_p$ , чему соответствует отношение  $\bar{p}/\bar{p}_p = 0,838$ . Ожидаемый результат измерения должен иметь порядок  $840 \text{ кгс/мм}^2$ , наблюдалось значение  $900 \text{ кгс/мм}^2$ .

Как видим, расчетные значения удовлетворительно совпадают с опытными. На лучшее согласие рассчитывать нельзя по двум причинам: твердость по Виккерсу не есть истинная твердость по Бринеллю и рост среднего давления в области полной пластичности может не совпадать в точности с ходом, найденным для одного частного случая.

### Предельное число твердости, измеряемое данным шариком

Предположим, что стальной шарик диаметром  $10 \text{ мм}$  с твердостью  $HV = 900$  вдавливается в бесконечно твердую стенку, не способную испытывать пластических деформаций. Для  $\bar{p}_p \approx HV = 900 \text{ кгс/мм}^2$  и  $E_1 = \infty$  пластические деформации шарика начнутся при усилии вдавливания около  $40 \text{ кгс}$ . Если принять рост  $\bar{p}$  в соответствии с данными в табл. 10, то при усилии вдавливания  $3000 \text{ кгс}$  — в 75 раз большем  $40 \text{ кгс}$  — отношение  $\bar{p}/\bar{p}_p \approx 1 : 1,1$ . Среднее давление на отпечатке будет  $900/1,1 \approx 800 \text{ кгс/мм}^2$ . Таким образом предельное значение твердости по Бринеллю, которое можно наблюдать, вдавливая  $10\text{-мм}$  шарик нагрузкой в  $3000 \text{ кгс}$ , равно  $800 \text{ кгс/мм}^2$  и зависит исключительно от твердости самого шарика.

### 11. ТЕОРИЯ В. В. ВАРНЕЛЛО (1949 г.)

В. В. Варнелло [3] поставил в самом общем виде задачу об отыскании связи твердости по Бринеллю с механическими константами металла, за которые он принимает напряжения, соответствующие характерным точкам диаграммы растяжения.

Кривую растяжения металлического образца до момента образования на нем шейки можно характеризовать заданием 11 величин: модуля упругости  $E$ , модуля сдвига  $G$ , коэффициента Пуассона  $\nu$ , модуля всестороннего сжатия  $K$ , предела упругости  $\sigma_e$ , предела текучести  $\sigma_s$ , предела прочности  $\sigma_b$ , равномерного удлинения  $\delta_p$ , удлинения в шейке  $\delta_k$ , равномерного сужения  $\psi_p$ , сужения в шейке  $\psi_k$ . Среди этих величин независимыми являются только 7 в силу существования четырех зависимостей:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

$$\sigma_e \approx \sigma_s, \quad \psi_p = \frac{\delta_p}{1+\delta_p}.$$

Любая величина  $a$ , зависящая от упруго пластической деформации под действием заданных сил тела заданной формы, изготовленного из дан-

ного металла, выразится некоторой функцией каких-либо семи независимых констант и параметров опыта, например такой:

$$a = f(E, \nu, \sigma_s, \sigma_n, \delta_p, \delta_k, \psi_k, F_1, F_2, \dots, K_1, K_2, \dots),$$

где  $F_1, F_2, \dots$  — величины действующих сил;

$K_1, K_2, \dots$  — коэффициенты формы, характеризующие форму образца и распределение сил.

Если бы справа отсутствовали силы и коэффициенты формы, то уравнение определяло собой какую-то производную константу материала, зависящую от семи выбранных независимых констант.

Твердость, определяемая вдавливанием наконечника, зависит, как хорошо известно, от условий опыта — от формы и размеров наконечника, а также от нагрузки. Это обстоятельство совершенно исключает возможность включения твердости в число механических констант материала. Для твердости по Бринеллю, если учесть, что вдавливание шарика не сопровождается разрушением, и поэтому опустить аргументы  $\delta_k$  и  $\psi_k$ , можно написать

$$HB = f(E, \sigma_s, \sigma_n, \delta_p, \nu, D, F). \quad (98)$$

Если перейти к безразмерным комплексам, то получим три новые возможные формулировки:

$$\frac{HB}{\sigma_s} = f_1 \left( \frac{\sigma_s}{E}, \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \frac{\sigma_s}{F}, \delta_p, \nu \right);$$

$$\frac{HB}{\sigma_n} = f_2 \left( \frac{\sigma_s}{E}, \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \frac{\sigma_s}{F}, \delta_p, \nu \right);$$

$$\frac{HB}{F} = f_3 \left( \frac{\sigma_s}{E}, \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \frac{\sigma_s}{F}, \delta_p, \nu \right).$$

Для группы каких-либо однородных металлов (в частности для столь практически важных черных металлов) можно произвести дальнейшее упрощение формул, учитывая, что  $E = \text{const}$  и  $\nu = \text{const}$ . Две первые формулы примут тогда такой вид:

$$\frac{HB}{\sigma_s} = f_1 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \frac{\sigma_s}{F}, \delta_p \right), \quad (99)$$

$$\frac{HB}{\sigma_n} = f_2 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \frac{\sigma_s}{F}, \delta_p \right). \quad (100)$$

Если в соответствии с предписаниями действующих стандартов производить измерения при заданной степени нагружения ( $F/D^2 = \text{const}$ ), то формулы станут еще более простыми

$$\frac{HB}{\sigma_s} = f_1 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \delta_p \right); \quad (101)$$

$$\frac{HB}{\sigma_n} = f_2 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_n}, \delta_p \right). \quad (102)$$

Внутри группы однородных металлов можно предполагать наличие зависимости

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_n} = f_3(\delta_p). \quad (103a)$$

Обработка результатов испытаний 2000 образцов черных металлов привела к эмпирической формуле

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_n} = 1 - 2,23\delta_p + 1,5\delta_p^2. \quad (103a)$$

С учетом этого соотношения можно окончательно упростить формулы (101) и (102)

$$\frac{HB}{\sigma_s} = \varphi_1(\delta_p), \quad (104)$$

$$\frac{HB}{\sigma_n} = \varphi_2(\delta_p). \quad (105a)$$

Обработка опытных данных привела к эмпирической формуле

$$\frac{HB}{\sigma_n} = 2,95(1 - \delta_p^2). \quad (105b)$$

Для того, чтобы найти  $\varphi_1(\delta_p)$ , надо исходить из формул (103a) и (105b). Получим

$$\frac{HB}{\sigma_s} = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} \cdot \frac{HB}{\sigma_n} = \frac{2,95(1 - \delta_p^2)}{1 - 2,23\delta_p + 1,5\delta_p^2}. \quad (106)$$

Установление приведенных трех зависимостей (103a), (105b) и (106) позволило наметить путь для нахождения механических констант черных металлов по измерениям твердости по Бригеллю. Любая пара величин —  $(\sigma_s, \delta_p)$  или  $(\sigma_n, \delta_p)$  — может быть найдена по двум отпечаткам шарика, сделанным при разных степенях нагружения, если будут известны соотношения

$$\frac{(HB)_1}{\sigma_n} = \psi_1(\delta_p) \quad \text{при} \quad \frac{F}{D^2} = c_1;$$

$$\frac{(HB)_2}{\sigma_n} = \psi_2(\delta_p) \quad \text{при} \quad \frac{F}{D^2} = c_2.$$

Если заранее построить график функции

$$\frac{(HB)_1}{(HB)_2} = \Psi_3(\delta_p),$$

то, зная  $(HB)_1$  и  $(HB)_2$ , можно найти  $\delta_p$ . По  $\delta_p$  можно найти остальные величины

$$\sigma_s = \frac{(HB)_1}{\varphi_1(\delta_p)}, \quad \sigma_n = \frac{(HB)_2}{\varphi_2(\delta_p)}.$$

Теоретические выводы В. В. Варнелло представляют известный интерес для техники механических испытаний металлов. Было бы желательно, чтобы описанный способ нахождения механических характеристик был более подробно изучен на практике.

## 12. ТЕОРИЯ Г. П. ЗАЙЦЕВА (1949 г.)

Теория Г. П. Зайцева [20, 21] построена на признании абсолютной справедливости закона Мейера. Г. П. Зайцев пишет:

«Как оказалось,  $A$  и  $n$  сохраняют для данного металла постоянство своих значений при любых условиях опыта, т. е. при любых  $d$ ,  $D$  и отвечающей им силе  $F$ , и, следовательно,  $A$  и  $n$  являются характерными для вдавливания шарика параметрами пластичности металла» [21].

Он называет их, соответственно, размерным и безразмерным параметрами пластичности. Хотя теория Г. П. Зайцева правильно отображает результаты опыта в среднем, но едва ли можно согласиться с возведением в ранг констант пластичности коэффициентов эмпирической интерполяционной формулы.

### Обоснование закона Мейера [23]

Г. П. Зайцев обосновывает закон Мейера следующими соображениями. При действии силы  $F$  на площадь  $S$ , являющуюся квадратной функцией линейной протяженности  $l$ , эта сила будет выражаться формулой

$$F = f(p, l),$$

где  $p$  — некоторое характерное давление.

В анализе размерностей устанавливается, что результаты всех научных измерений должны удовлетворять принципу абсолютного значения относительного количества, по которому отношение двух величин одного и того же рода не зависит от единиц, применяемых для измерения. Можно математически показать, что каждая величина, удовлетворяющая этому принципу, должна выражаться через величины, функцией которых она является, как произведение последних в некоторых степенях на некоторую безразмерную постоянную. В применении к нашему случаю

$$F = cp^m l^n,$$

где  $c$  — безразмерная постоянная.

Приравняв размерности левой и правой частей равенства, устанавливаем, что  $m = 1$ ,  $n = 2$ , как это можно было бы предвидеть заранее. Желая обосновать закон Мейера, Г. П. Зайцев останавливается на полпути и исходит из формулы  $F = al^n$ , где  $a$  — размерный множитель, размерность которого будет

$$[a] = \left[ \frac{F}{L^n} \right] = [p] : [L^{n-2}].$$

Предполагая, что в знаменатель последнего выражения входит протяженность, отличная от  $l$ , он получает

$$F = p_0 \frac{l^n}{l_0^{n-2}} = p_0 l_0^2 \left( \frac{l}{l_0} \right)^n,$$

и делает далее отсюда такое заключение:

«Целесообразно искать формулу пластического вдавливания шарика в таком виде:

$$F = A \frac{d^n}{D^{n-2}} = AD^2 \left( \frac{d}{D} \right)^n.$$

Эта формула прекрасно подтверждается экспериментальными данными, причем  $A$  и  $n$  совершенно не зависят от условий опыта и, следовательно, являются константами металла» [20].

Нельзя согласиться с этими соображениями Г. П. Зайцева. Закон Мейера не может быть доказан средствами анализа размерностей. При вдавливании шарика должно существовать некоторое соотношение между силой вдавливания  $F$ , характерным давлением  $p_0$ , диаметрами отпечатка и шарика:

$$\psi(F, p_0, d, D) = 0. \quad (107)$$

После введения безразмерных комплексов это соотношение можно записать в таком виде:

$$\frac{p_0}{F} = \Psi \left( \frac{d}{D} \right),$$

откуда

$$F = p_0 D^2 \Psi \left( \frac{d}{D} \right). \quad (108)$$

Вот все, что может нам дать анализ размерностей. Вид функции относительного диаметра отпечатка остается совершенно невыясненным, подлежащим экспериментальному изучению. Малый отрезок любой кривой всегда можно отождествить с отрезком прямой. Степенная функция является еще более мощным средством интерполяции, чем линейная функция. Любая монотонная функция с конечными монотонными производными может быть в окрестности любой из своих точек аппроксимирована степенной функцией. В этом причина успеха, выпавшего на долю степенного закона Мейера.

Если поступить по примеру Г. П. Зайцева, только начать вывод с другого конца, то из формулы  $F = bp^m$  можно получить выражение для силы вдавливания

$$F = p_0 d^2 \left( \frac{p}{p_0} \right)^m.$$

Если отождествить характерное давление  $p_0$  с модулем упругости при упругом вдавливании или с пределом текучести при пластическом вдавливании, то получим формулы, которые могут оказаться приближенно правильными в той же мере, как и закон Мейера.

#### Закон подобия при вдавливании шарика

Два геометрически подобных тела из разных металлов деформируются подобно, если деформации во всех соответственных точках тел одинаковы, а напряжения в точках одного из них равны напряжениям в соответственных точках другого, умноженным на некоторый постоянный множитель.

При вдавливании шарика подобие деформаций первого и второго металлов требует, чтобы для каждого значения  $(d/D)_i$  отношение средних нормальных напряжений в плоскости проекции отпечатка (твердостей по Мейеру) было постоянным числом:

$$\frac{(HM)_{i1}}{(HM)_{i2}} = \text{const.}$$

Выражая твердости по Мейеру через константы пластичности, найдем, что

$$\frac{A_1}{A_2} \left( \frac{d}{D} \right)_i^{n_1 - n_2} = \text{const.}$$

Поскольку значения констант  $A$  и  $n$  не зависят от относительного диаметра отпечатка, выполнение этого условия возможно только при  $n_1 = n_2$ .

Равенство деформаций разных металлов при вдавливании одинаковых шариков возможно в том случае, если: 1) металлы обладают одинаковыми безразмерными константами пластичности; 2) нагрузки на шарики пропорциональны величине размерных констант пластичности.

## Деформации при вдавливании шарика

Шарики диаметром 19÷20 мм вдавливались в плитки с нанесенной на их поверхности сеткой параллельных линий. Измерения искажений сетки позволяют вычислить деформации поверхности отпечатка на основе следующих соображений. Если на плоскости плитки нанести сетку концентрических окружностей и в ее центре сделать отпечаток, плоские круговые пояски обратятся в сферические и проекции последних на плоскость изменятся и по ширине и по диаметру.

Полную деформацию сжатия пояса  $\delta_{сж}$  можно разложить на «плоскую»  $\delta_{пл}$  при переходе I→II и на «сферическую»  $\delta_{сф}$  при переходе II→III (рис. 17). Учитывая постоянство объема пояса  $\pi b d h = \text{const}$ , из определения величины сжатия получим

$$\delta_{пл} = 1 - \frac{h_2}{h_1} = 1 - \frac{b_1 d_1}{b_2 d_2},$$

$$\delta_{сф} = 1 - \frac{h_3}{h_2} = 1 - \frac{b_2}{b_3} = 1 - \cos \alpha,$$

$$\delta_{сж} = 1 - \frac{h_3}{h_1} = 1 - \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_2} = \delta_{пл} + \delta_{сф} - \delta_{пл} \delta_{сф}.$$

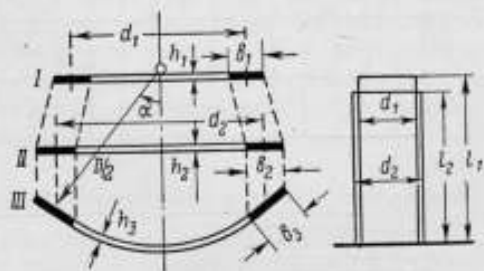


Рис. 17. Деформации кольцевого пояса по Г. П. Зайцеву.

Последняя формула пригодна и для вычисления среднего сжатия поверхностного слоя отпечатка  $\bar{\delta}_{сж}$ , если подставить в нее соответствующие средние  $\bar{\delta}_{пл}$  и  $\bar{\delta}_{сф}$ .

Если некоторая окружность на шлифе с диаметром  $d_0$  после вдавливания шарика совпадает с краем его отпечатка, имеющим диаметр  $d$ , то, учитывая, что  $d > d_0$  и  $\pi d^2 h / 4 = \text{const}$ , получим

$$\bar{\delta}_{пл} = 1 - \left( \frac{d_0}{d} \right)^2,$$

$$\bar{\delta}_{сф} = 1 - \frac{\pi d^2}{4 \pi D h} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

На рис. 18 показана деформация сжатия поверхности отпечатка и разделение ее на плоскую и сферическую составляющие. Оказывается, что деформация сжатия поверхностного слоя минимальна в центре, увеличивается при удалении от центра к краям и у самых краев резко уменьшается, оставаясь, однако, значительной по величине. Для подтверждения этого факта, противоречащего общезвестному наблюдению, что твердость металла, измеренная меньшим шариком, максимальна в центре отпечатка, были исследованы деформации глубинных слоев металла вблизи отпечатка. С этой целью был изготовлен разъемный по осевому сечению усеченный конус и на плоскости одной из его половинок была нанесена прямоугольная сетка. После запрессовки конуса в специальную оправку и нанесения отпечатка на одном из его оснований сетка исказилась (рис. 19). Деформация поверхностного слоя в центре отпечатка оказалась меньше, чем в других его зонах, но зато нижележащие слои на оси отпечатка получили особенно сильную деформацию. Образовавшийся твердый «подслой» и определяет высокое число твердости именно в центре отпечатка, если измерения производить с помощью шарика диаметром 1 мм.

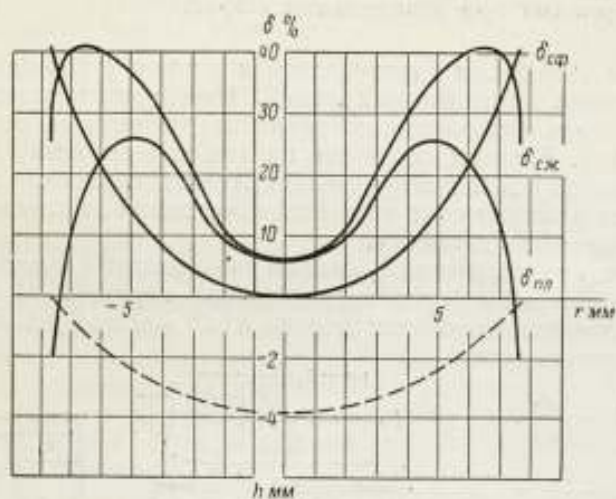


Рис. 18. Деформация сжатия поверхности отпечатка.

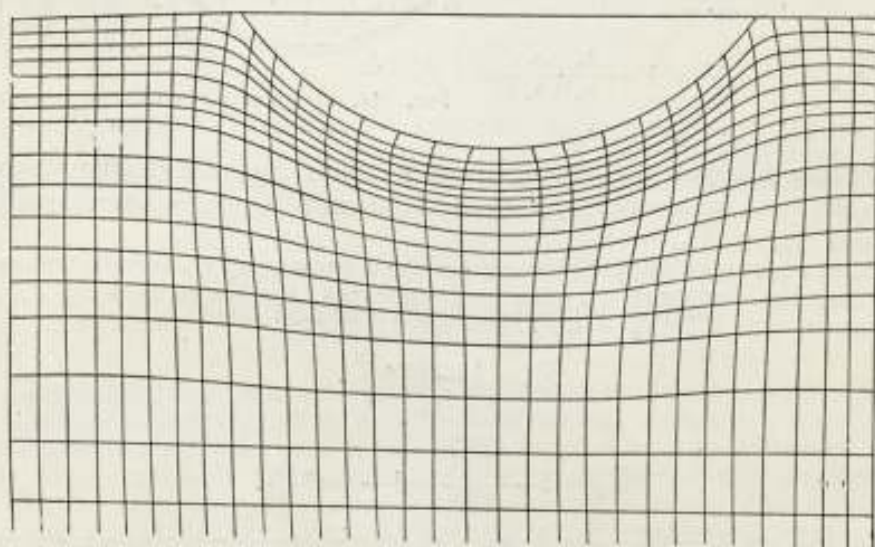


Рис. 19. Искажения прямоугольной сетки около отпечатка шарика.

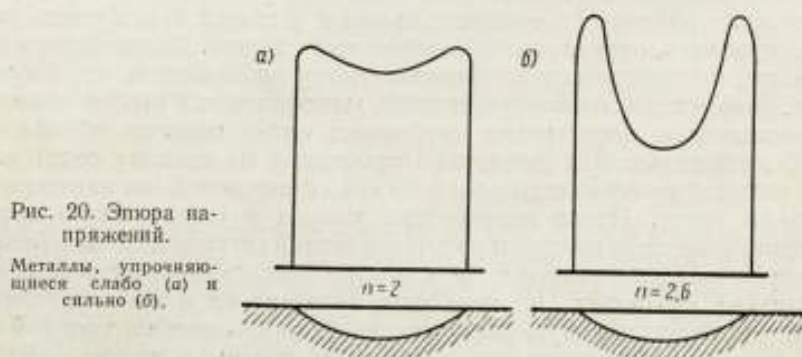


Рис. 20. Эпюра напряжений. Металлы, упрочняющиеся слабо (а) и сильно (б).



Эпюра напряжений, построенная на диаметре отпечатка (рис. 20), будет иметь разный вид для металлов слабо (*a*) и сильно (*b*) упрочняющихся. Поскольку интеграл напряжений, взятый по поверхности отпечатка, равен в обоих случаях нагрузке на шарик, напряжения у краев отпечатка в области больших деформаций должны быть выше у сильнее упрочняющегося металла.

При решении в теории упругости задачи Герца о вдавливании жесткого шара в плоскую поверхность упругого тела давление оказывается максимальным в центре, а на контуре круга касания равным нулю. При решении же задачи Буссинеска о вдавливании цилиндрического плоского штампа в плоскую поверхность упругого тела давление минимально в центре, а на контуре круга касания равно бесконечности. Экспериментально Г. П. Зайцевым установлено, что у краев отпечатка шарика пластическая деформация максимальна, а в центре минимальна. Соответственно касательные напряжения у краев отпечатков выше, чем в центре, что ближе к решению Буссинеска для упругих деформаций. Вывод Герца о местоположении точек с максимальным касательным напряжением, по Г. П. Зайцеву, «не является абсолютно достоверным».

### Связь констант пластичности с характеристиками кривой растяжения

На основании некоторых опытных данных, а также теоретических выводов, Г. П. Зайцевым дан график, который позволяет, зная константы пластичности, находить характеристики кривой растяжения металлов, рвущихся в шейке (рис. 21).

Предельное равномерное удлинение  $\delta_p$  связано с безразмерной константой пластичности эмпирическим соотношением

$$\delta_p \approx \frac{n-2}{1,13}, \quad (109)$$

которому соответствует кривая 1.

Отношение предела прочности к размерной константе пластичности  $\sigma_b : A$  является функцией безразмерного параметра пластичности (кривая 2).

Предел упругости  $\sigma_{ев}$  на любой желаемой базе пластической деформации можно определить, умножая ранее определенный предел прочности на соответствующее значение отношения  $\sigma_{ев} : \sigma_b$ . (Кривая 3 соответствует отношению  $\sigma_{30,2} : \sigma_b$ ; кривая 4 — отношению  $\sigma_{10,001} : \sigma_b$ .)

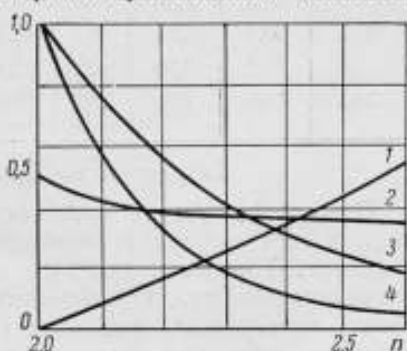


Рис. 21. Равномерное удлинение и предел прочности металлов, рвущихся с образованием шейки.

### Инварианта пластичности при вдавливании шарика

Холодная деформация металла изменяет все его константы. Исходя из представления о единстве металла, несмотря на различие его свойств, следует ожидать существования какой-то инвариантной функции констант, которая сохраняет свое значение для разных пластических состояний металла. Значение этого инварианта позволяет по константам металла для разных степеней наклепа установить, что мы имеем дело с одним и тем же куском металла.

При растяжении инвариантом является выражение

$$I_{\text{раст}} = \sigma_b (1 + \delta_p).$$

При вдавливании шарика с ростом наклепа константы  $A$  и  $n$  изменяются, причем  $A$  увеличивается, а  $n$  уменьшается. По аналогии с инвариантом при растяжении Г. П. Зайцев инвариант при вдавливании шарика ищет в виде

$$I_{ш} = A(n - 1). \quad (110)$$

Для проверки существования этого инварианта Г. П. Зайцев приводит данные для меди, никеля и железа (табл. 11). Мы не можем согласиться с заключением Г. П. Зайцева: «Анализ таблицы позволяет признать существование инварианта и при вдавливании шарика» [20]. Числовое значение предполагаемого инварианта и для меди и для никеля сначала убывает при увеличении удлинения, а затем начинает возрастать. Такая закономерность не может быть приписана погрешностям измерений. Немногочисленные данные, приведенные для мягкого железа, также подтверждают убывание величины инварианта в начальный период увеличения нагрузок.

Таблица 11

Медь				Никель				Мягкое железо			
$\delta\%$	$A$	$n$	$I_{ш}$	$\delta\%$	$A$	$n$	$I_{ш}$	$\delta\%$	$A$	$n$	$I_{ш}$
0	48,7	2,52	74,0	0	132	2,40	185	0	79,5	2,20	95,4
1,5	48,1	2,36	65,4	2,0	135	2,28	173	3500	81,2	2,16	94,2
5,5	52,9	2,20	63,5	4,8	142	2,23	175	5500	87,1	2,04	90,6
11,3	58,5	2,12	65,5	10,0	155	2,17	181	—	—	—	—
20,0	63,2	2,06	67,0	17,4	168	2,13	190	—	—	—	—
39,5	69,6	2,01	70,3	29,5	176	2,08	190	—	—	—	—

#### Твердость по Бринеллю и предел прочности

Отношение предела прочности к твердости по Бринеллю всегда привлекало к себе внимание техников, безуспешно пытавшихся уточнить его значение. Твердость является «лишь одним из далеко не совершенных непредельных параметров пластичности, в какой-то мере и весьма неоднозначно отражающих механические свойства» [20, стр. 21]. Предел прочности  $\sigma_b$  металлов, дающих при растяжении шейку, является предельным параметром пластичности, поскольку его верхний численный предел обусловлен физикой процесса деформации — образованием шейки.\* Установление однозначной зависимости, как указывает Г. П. Зайцев, между непредельным и одним предельным параметрами пластичности невозможно. Пластические свойства характеризуются двумя константами и нельзя произвольно игнорировать одну из них. Все ранее предложенные формулы  $\sigma_b = f(HB)$ , в которых чаще всего фигурируют линейные функции твердости, нельзя считать теоретически обоснованными. Все они могут быть приближенно верными только для частного случая вполне определенного класса металлов.

Отношение твердости по Бринеллю к пределу прочности можно представить в виде произведения двух других отношений:

$$c_b = \frac{HB}{\sigma_b} = \frac{HB}{A} \cdot \frac{A}{\sigma_b}. \quad (111)$$

\* Предел прочности  $\sigma_b$  хрупких металлов не является параметром пластичности, но служит предельным параметром прочности. Вопрос о связи  $\sigma_b$  и  $HB$  оставляем вне рассмотрения, ограничиваясь замечанием, что при равных значениях твердости металлы могут обладать различной хрупкой прочностью.

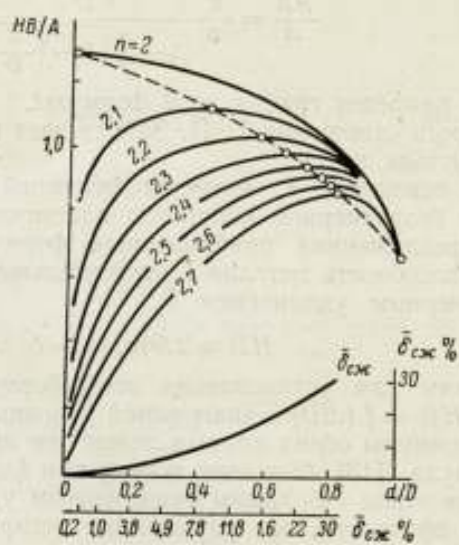


Рис. 22. График формулы (112).

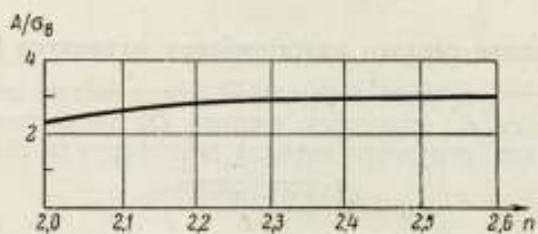


Рис. 23. График отношения  $A/\sigma_0$ .

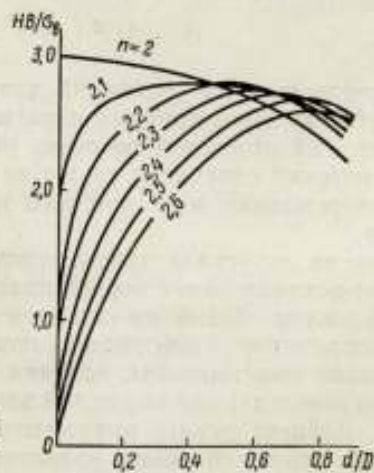


Рис. 24. График отношения  $HV/\sigma_0$ .

Для того чтобы найти величину первого отношения, надо исходить из формулы, которая получается при объединении определения твердости по Бринеллю с законом Мейера:

$$\frac{HB}{A} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{d}{D}\right)^n}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}} \quad (112)$$

На рис. 22 приведен график этой формулы.

Для второго отношения Г. П. Зайцев дает график (рис. 23), установленный опытным путем.

Искомое отношение  $c_p$  является функцией относительного диаметра отпечатка и безразмерной константы пластичности (рис. 24).

Ранее предложенная приближенная формула Г. П. Зайцева [18] учитывает способность металла к относительному упрочнению, выраженную равномерным удлинением  $\delta_p$

$$HB \approx 2,94\sigma_p (1 - \delta_p^2) \quad (113)$$

Основанием для установления этой формулы послужило сходство диаграммы  $HB = f(d/D)$  с диаграммой условных напряжений при растяжении. Максимумы обеих кривых лежат тем правее, чем выше значения  $n$  и  $\delta_p$ . Формула (113) объясняет, почему при одинаковой твердости мягкие углеродистые стали с большим равномерным удлинением  $\delta_p$  имеют больший предел прочности, чем улучшенные легированные стали с меньшим значением  $\delta_p$ .

#### Образование первого пластического отпечатка [22]

В области чисто упругих деформаций соотношение между усилием вдавливания шарика  $F$ , диаметром шарика  $D$ , диаметром отпечатка  $d$  и двумя константами упругости металла дает формула Герца

$$d = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu^2)DF}{E}}$$

В области пластических деформаций связь между упомянутыми величинами выражается формулой Мейера

$$F = AD^2 \left(\frac{d}{D}\right)^n$$

Совместное решение этих уравнений для установления диаметра предельного отпечатка  $d_z$  возможно, как полагает Г. П. Зайцев, только в том случае, если упругий отпечаток не очень малой величины превращается в первый пластический отпечаток также не очень малой величины, пластически деформированная зона которого превышает диаметр пластического отпечатка.

Теория Герца не допускала такого совместного решения, потому что она предполагает возникновение первой пластической деформации в одной точке, вернее в малом объеме на оси отпечатка. Опыты Г. П. Зайцева по изучению распределения деформаций пластического сжатия показали, что эти деформации максимальны, вопреки теории Герца, у краев отпечатка в весьма широком диапазоне усилий вдавливания. Это обстоятельство побудило Г. П. Зайцева искать выражение диаметра предельного отпечатка совместным решением обоих уравнений. Результатом явилась его формула

$$d_z = D \left[ A \frac{3(1-\nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{3-n}} \quad (114)$$

Если сочетать формулу Герца с пограничным условием равенства действующего на отпечаток среднего напряжения пределу упругости  $c\sigma_e$  ( $c$  — коэффициент перехода от линейного к объемному напряженному состоянию)

$$F_z = c\sigma_e \frac{\pi d_z^2}{4},$$

получим

$$d_z = D \frac{\pi c \sigma_e}{4} \cdot \frac{3(1-\nu^2)}{E}. \quad (115)$$

Если же сочетать формулу Мейера с тем же пограничным условием, найдем

$$d_z = D \left[ \frac{\pi c \sigma_e}{4A} \right]^{\frac{1}{n-2}}. \quad (116)$$

Для степени нагружения Г. П. Зайцев получает соответственно три формулы:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{F}{D^2}\right)_z &= A^{\frac{3}{3-n}} \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{E} \right]^{\frac{n}{3-n}}, \\ \left(\frac{F}{D^2}\right)_z &= \left[ \frac{\pi c \sigma_e}{4} \right]^3 \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{E} \right]^2, \\ \left(\frac{F}{D^2}\right)_z &= A^{\frac{2}{2-n}} \left[ \frac{\pi c \sigma_e}{4} \right]^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

### Связь упругих и пластических констант материала

Упругие и пластические константы, являясь функциями свойств атомов и структуры кристаллической решетки, должны быть связаны между собой, в пользу чего свидетельствует параллелизм между изменениями модуля и предела упругости у чистых металлов. Эта точка зрения Г. П. Зайцева противоположна мнению Я. Б. Фридмана, который в своей монографии [54] неоднократно подчеркивает, что «никакой закономерной связи между упругими характеристиками  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  и пределом упругости существовать не может».

Исключая отношение  $d_z/D$  из формул (114)—(116) для диаметра предельных пластических отпечатков, Г. П. Зайцев находит связь между пределом упругости  $\sigma_e$  и «упругими»  $E$ ,  $\nu$  и «пластическими»  $A$  и  $n$  параметрами металла:

$$\sigma_e = \frac{4}{\pi c} \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{E} \right]^{\frac{n-2}{3-n}} A^{\frac{1}{3-n}}. \quad (118)$$

### 13. ТЕОРИЯ П. О. ПАШКОВА (1950 г.)

Теория П. О. Пашкова изложена им в главе «Единый критерий твердости металлов при вдавливании» монографии «Пластичность и разрушение металлов» [43]. Ценной особенностью его работы является попытка учета влияния сил трения.

#### Сила вдавливания

На поверхности контакта наблюдаются значительные силы трения, которые приводят к существенному изменению напряженного состояния по крайней мере в близких к поверхности контакта слоях деформирован-

ного металла. Поэтому необходим специальный анализ вдавливания с учетом сил трения.

На рис. 25 дана схема напряжений, возникающих при вдавливании шарика. Треугольник  $abc$  представляет собой бесконечно малый клиновидный элемент тела, находящийся на расстоянии  $r$  от центра отпечатка и образованный поверхностью контакта и плоскостями, перпендикулярными главным напряжениям  $\sigma_r$ ,  $\sigma_h$  и  $\sigma_t$ . Тангенциальные напряжения  $\sigma_t$ , очевидно, перпендикулярны плоскости осевого сечения сферы. Положение плоскостей, перпендикулярных остальным двум главным напряжениям, определяется углом  $\varphi$ , который является функцией коэффициента трения. При отсутствии трения этот угол равен нулю.

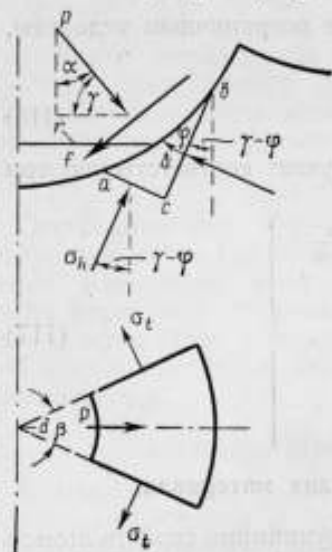


Рис. 25. Схема напряжений, возникающих при вдавливании шарика.

Третье уравнение, связывающее между собой напряжения и деформации, можно получить из условия пластического течения без упрочнения. Если расположить главные напряжения в порядке убывания по абсолютной величине  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то условия пластического течения будут иметь вид

$$s_n = \frac{|\epsilon|_{\max}}{\epsilon_t} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) \right],$$

где  $s_n$  — «истинное временное сопротивление разрыву (истинный предел прочности)».

В применении к рассматриваемому случаю можно сделать естественное предположение, что деформации в направлении  $h$  и  $t$  являются положительными (т. е. растягивающими). Из условия неизменности объема

$$\epsilon_r + \epsilon_t + \epsilon_h = 0$$

вытекает, что радиальная деформация  $\epsilon_r$  является наибольшей по абсолютной величине. Условия пластического течения будут таковы:

$$s_n = \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_h + \sigma_t),$$

$$s_n = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_t} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_h) \right], \quad s_n = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_h} \left[ \sigma_h - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) \right].$$

Исключая из любых двух уравнений  $\sigma_t$ , получим искомое третье уравнение

$$ks_n = \sigma_r - \sigma_n, \quad (121)$$

где

$$k = \frac{2}{3} \left( 2 + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_r} \right). \quad (122)$$

Исключая из уравнений (119)–(120)  $\sigma_n$  и  $\sigma_r$ , найдем связь «между удельной силой трения  $f$ , характеристикой  $k$  деформированного состояния прилегающих к шарiku слоев металла, углом наклона главной площадки  $\varphi$  и постоянным сопротивлением пластическому течению  $s_n$ , численно равным истинному пределу прочности при растяжении» [42, стр. 112],

$$s_n = - \frac{2f}{k \sin \varphi}.$$

Получившийся отрицательный знак можно отбросить, так как он свидетельствует только о том, что при составлении условий пластического сечения нужно было бы по характеру деформирующих сил приписать  $s_n$  отрицательный знак. Для давления будем иметь

$$p = \frac{f}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} s_n, \quad (123)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) \sin 2\varphi. \quad (124)$$

Выражение (123) позволяет сделать два вывода:

1) давление зависит от соотношения главных деформаций в слоях вблизи поверхности контакта;

2) давление пропорционально постоянному сопротивлению пластическому течению  $s_n$  независимо от вида напряженного состояния, так как при выводе о нем не было сделано никаких ограничивающих предположений.

Сила вдавливания, в соответствии со схемой на рис. 25, выразится интегралом по поверхности

$$F = \int_{(S)} (p \cos \alpha + f \sin \alpha) dS.$$

Подставляя сюда значение давления из (124), получим окончательно

$$F = \frac{s_n}{\mu} \int_{(S)} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \lambda dS. \quad (125)$$

Коэффициент  $\lambda$  нельзя выносить из-под знака интеграла, потому что в общем случае он зависит от угла  $\alpha$ , т. е. от наклона касательной в рассматриваемой точке шарика.

### Сопротивление пластическому течению

От «величины силы, действующей на внедряющееся тело, легко перейти к среднему давлению на площадь отпечатка, для чего достаточно разделить обе части равенства (т. е. выражения для  $F^*$ ) на площадь отпечатка  $S$ :

$$\bar{p} = \frac{F}{S}.$$

\* См. равенство (125).

Полученное среднее давление  $\bar{p}$  является общепринятым значением твердости, обычно определяемым из опыта. Следовательно, нами в общем виде получено соотношение между твердостью при любой форме внедряющегося тела и сопротивлением пластическому течению, определяемым, например, из испытания на разрыв» [43, стр. 114].

В приведенной цитате П. О. Пашков пользуется необычной терминологией, а именно он называет площадью отпечатка то, что принято называть площадью проекции отпечатка на первоначальную плоскую поверхность испытуемого тела. Переходя к анализу вдавливания шарика, он рассуждает следующим образом:

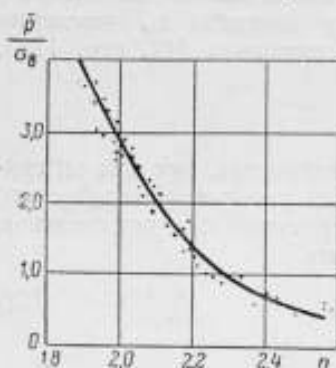


Рис. 26. График отношения  $\bar{p}/\sigma_0$ .

«Примем в качестве малого отпечатка тот отпечаток, который по закону Мейера соответствует значению силы, равному единице». Для такого отпечатка

«... при достаточно малых отпечатках среднее давление на весь отпечаток и истинное давление  $p$  в любой точке отпечатка должны мало отличаться друг от друга, ибо углы действия (угол  $\alpha$  на рис. 25) истинных давлений  $p$  близки к нулю. Следовательно твердость по Мейеру, определенная ... для малых отпечатков, может быть принята равной давлению ...», т. е.

$$\bar{p} \approx p = \frac{\lambda}{\mu} s_0 = \frac{\left(2 + \frac{e_t}{e_r}\right) \sin 2\varphi}{3\mu} s_0. \quad (126)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{4}{\pi} (a)^{2/n}. \quad (127)$$

Сопоставление формул (126) и (127) привело П. О. Пашкова к заключению, что соотношение «между твердостью по Мейеру и истинным пределом прочности при растяжении того же металла должно быть функцией от показателя степени  $n$  в законе Мейера»:

$$\frac{\bar{p}}{s_0} = f(n).$$

«Прямая проверка была выполнена и привела к результату [42], полностью подтвердившему предположение (рис. 26). Различного рода металлы, как цветные, так и черные, испытанные в самых различных состояниях, взятые из различных литературных источников и полученные непосредственными опытами автора, хорошо уложились на кривую. Уравнение, близко отражающее эту зависимость, имело вид

$$\frac{\bar{p}_1}{s_0} = 3 \left(\frac{2}{n}\right)^8. \quad (128)$$

Надежность полученной зависимости достаточно велика. Существующая практика пересчета, когда для каждой группы стали подбирались свои переходные коэффициенты от твердости по Бринеллю к временному сопротивлению, заменяется одним обобщенным и более точным выражением».



#### 14. ТЕОРИЯ М. С. ДРОЗДА (1958 г.)

В 1958 г. М. С. Дрозд опубликовал статью «Шариковая проба, не зависящая от условий испытания» [14], в которой поставил ряд важных вопросов и сделал ряд интересных предложений. Последующие работы [15—18] содержат ряд дополнений и разъяснений к указанной основной статье.

##### Основные величины при вдавливании шарика

Глубину невосстановленного отпечатка  $t$  можно легко вычислить по геометрическим соображениям, зная, что, как показали опыты, после снятия нагрузки диаметр отпечатка изменяется на неощутимую величину

$$t = R - \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (129)$$

где  $R$  — радиус шарика;

$r$  — радиус восстановленного отпечатка.

Глубина невосстановленного отпечатка складывается из двух частей: упругой  $w$  и пластической  $h$

$$t = w + h. \quad (130)$$

Упругая часть упруго-пластической деформации по закону Герстнера равна чисто упругой деформации для действующей нагрузки. Чисто упругое вдавливание шарика в плоскую поверхность полубесконечного тела представляет собой частный случай задачи Герца. Если материалы, из которых изготовлены шарик и тело, имеют одинаковый модуль упругости  $E$  и одинаковый коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , то

$$w = 0,615 \sqrt[3]{\frac{1}{R} \left(\frac{F}{E}\right)^2}. \quad (131)$$

Опыты М. С. Дрозда показали, что для разных сталей (10; 45; 12ХН3А; 18ХНВА; 45ХНМФА) опытные значения  $w$  отличаются от вычисленных по формуле (131) в большинстве случаев не более чем на 5%.

Пластическую часть деформации вдавливания, т. е., иначе говоря, глубину восстановленного отпечатка, можно поэтому с достаточной точностью найти как разность выражений (130) и (131)

$$h = t - w. \quad (132)$$

Безразмерный параметр

$$m = \frac{w}{t} \quad (133)$$

характеризует долю упругой составляющей при вдавливании.

Твердость по Бринеллю вычисляется как отношение усилия вдавливания к площади невосстановленного отпечатка

$$HB = \frac{F}{\pi Dt} = \frac{2F}{\pi D (D^2 - \sqrt{D^2 - d^2})}. \quad (134)$$

##### Диаграммы вдавливания

###### а. Зависимость усилия вдавливания от глубины невосстановленного отпечатка

На рис. 27 нанесены кривые (1—5) зависимости усилия вдавливания от глубины невосстановленного отпечатка для сталей разных марок. До тех пор пока усилие вдавливания остается меньше некоторой величины  $F_p$ , кривая 1 может быть построена теоретически по формулам Герца. Предельную нагрузку  $F_p$ , при которой возникает пластический отпечаток, можно найти по этим же формулам.

В центре площадки касания главные нормальные напряжения равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_r = -\frac{1+2\nu}{2} \sigma_z, \quad (135)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -\frac{3}{2} \frac{F_p}{\pi r_p^2}. \quad (136)$$

По теории максимальных касательных напряжений

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_s, \quad (137)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести (упругости) материала тела при простом растяжении или сжатии.

Для случая, когда материалы шарика и тела имеют одинаковый модуль упругости  $E$  и одинаковый коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , радиус площадки контакта, иными словами, радиус  $r_s$  первого пластического отпечатка, равен

$$r_s = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_p}{2E}} D. \quad (138)$$

Рис. 27. Кривые зависимости усилия вдавливания от глубины невосстановленного отпечатка.

Подставляя значения величин (135), (136) и (138) в формулу (137) и решая полученное уравнение относительно  $F_p$ , найдем

$$F_p = kD^3, \quad (139)$$

где коэффициент пропорциональности равен

$$k = \frac{33,5}{E^2} \left( \frac{\sigma_s}{1-2\nu} \right)^3. \quad (140)$$

#### б. Зависимость усилия вдавливания от глубины восстановленного отпечатка

Мартенс, Деврис, Батсон и др. [41] уже отмечали существование линейной зависимости усилия вдавливания от глубины восстановленного отпечатка. Они, однако, исследовали мягкие металлы при сравнительно больших нагрузках и пришли поэтому к ошибочному представлению, будто прямые обязательно проходят через начало координат. На самом деле они отсекают на оси ординат отрезок, равный  $F_p$ .

Схематизированная диаграмма вдавливания шарика заданного диаметра в данный материал исчерпывающим образом определяется двумя параметрами:  $F_p$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  (рис. 28). Если  $F_p$  характеризует сопротивление материала зарождению пластической деформации, то  $\operatorname{tg} \alpha$  характеризует сопротивление материала пластической деформации. (Кривые 1—5 относятся к разным материалам). Для вдавливания заданного шарика в определенный материал имеем

$$\frac{F_1 - F_p}{h_1} = \frac{F_2 - F_p}{h_2}. \quad (141)$$

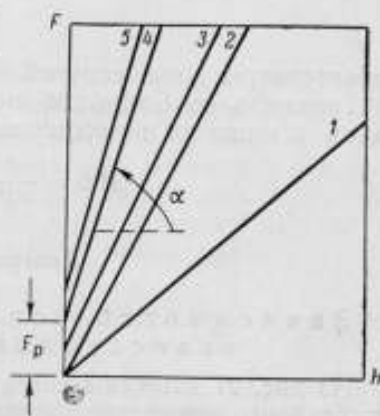


Рис. 28. Кривые зависимости усилия вдавливания от глубины восстановленного отпечатка.

### Физическое подобие отпечатков

Твердость по Бринеллю при вдавливании шариков различного диаметра получается одинаковой при соблюдении геометрического подобия, когда углы вдавливания шариков одинаковы, т. е. когда

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{d}{D} = \text{idem.} \quad (142)$$

Обращаясь к формуле (134), определяющей твердость  $HB$ , и записывая ее в несколько измененном виде, а именно

$$HB = \frac{2F}{\pi D^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}\right)},$$

можно убедиться, что геометрическое подобие сопровождается механическим подобием

$$\frac{F}{D^2} = \text{idem.} \quad (143)$$

при котором на единицу поверхности шарика приходится одинаковая нагрузка.

Предположим, что  $D_2 = nD_1$ . Тогда  $F_2 = n^2F_1$ , и поскольку выполняется равенство

$$HB = \frac{F_1}{\pi D_1 t_1} = \frac{F_2}{\pi D_2 t_2},$$

то

$$t_2 = nt_1. \quad (a)$$

Легко показать, что такое же соотношение будет и между упругими смещениями. Для доказательства обратимся к формуле (131), записывая ее схематично

$$w = c \sqrt[3]{\frac{F^2}{D}}.$$

Для случая подобных отпечатков имеем равенство

$$w_2 = c \sqrt[3]{\frac{F_2^2}{D_2}} = c \sqrt[3]{\frac{n^4 F_1^2}{n D_1}} = nc \sqrt[3]{\frac{F_1^2}{D_1}} = nw_1. \quad (b)$$

Сопоставляя равенства (a) и (b), находим, что у подобных отпечатков

$$m = \frac{w}{t} = \text{idem.} \quad (144)$$

Выражение (144) показывает, что геометрическое подобие отпечатков сопровождается их физическим подобием. Для подобных отпечатков шариков отношение упругой части деформации к полной деформации постоянно для заданного материала. Опыты М. С. Дрозда с разными сталями подтвердили это положение.

Предположим, что шарики с диаметрами  $D_1$  и  $D_2 = nD_1$  вдавливаются силами  $F_1$  и  $F_2$  в плоскую грань тела, образуя геометрически подобные невозстановленные отпечатки. В этом случае

$$F_2 = n^2 F_1, \quad t_2 = nt_1, \quad w_2 = nw_1. \quad (c)$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$h_2 = nh_1.$$

Обозначим  $F_{p1}$  и  $F_{p2}$  нагрузки, при которых зарождаются пластические отпечатки первого и второго шарика. Согласно уравнению (139)

$$F_{p1} = kD_1^3, \quad F_{p2} = kD_2^3. \quad (d)$$

Вычислим отношение

$$\frac{F_2 - F_{p2}}{D_2 h_2}.$$

Подставляя в него величины из равенств (c) и (d), получим

$$\frac{F_2 - F_{p2}}{D_2 h_2} = \frac{n^2 F_1 - k D_2^3}{n D_1 \cdot n h_1} = \frac{n^2 F_1 - k n^2 D_1^3}{n^2 D_1 h_1} = \frac{F_1 - F_{p1}}{D_1 h_1}.$$

Сопоставляя крайние звенья этой цепи равенств, имеем

$$\frac{F_2 - F_{p2}}{D_2 h_2} = \frac{F_1 - F_{p1}}{D_1 h_1}. \quad (145)$$

Это равенство установлено в ходе доказательства только для подобных отпечатков, однако оно справедливо для пары любых отпечатков, поскольку отношение  $(F - F_p)/h$  является постоянным при вдавливании любого шарика, как это было установлено раньше формулой (141).

Из равенства (145) вытекает полезное правило — при заданном превышении нагрузки  $F$  над нагрузкой  $F_p$  появления пластического отпечатка глубина образующегося восстановленного отпечатка обратно пропорциональна диаметру шарика.

#### Новое число твердости по М. С. Дрозду

М. С. Дрозд предложил считать новым числом твердости отношение

$$H = \frac{F - F_p}{\pi D h}. \quad (146)$$

Для того чтобы найти  $H$ , надо знать не только  $F$  и  $h$ , но и  $F_p$ . Этого затруднения можно избежать, производя двукратное вдавливание шарика. Так как

$$\frac{F - F_p}{h} = \frac{F - F_1}{h - h_1},$$

где  $F_1$  — произвольно выбранная нагрузка, то

$$H = \frac{F - F_1}{\pi D (h - h_1)}. \quad (147)$$

По мысли М. С. Дрозда можно упростить определение нового числа твердости, основываясь на том, что отношение  $h_1/h$  может быть определено раз навсегда. Вводим в знаменателе безразмерные параметры

$$m = \frac{w}{t}; \quad m_1 = \frac{w_1}{t_1}; \quad \beta = \frac{m_1}{m}.$$

Тогда

$$H = \frac{F - F_1}{\pi D \left[ h + \frac{w_1}{m\beta} (m\beta - 1) \right]}. \quad (148)$$

Все три параметра не зависят от диаметра шарика. Параметры  $m$  и  $m_1$  зависят от состава стали и являются функциями степени нагружения. Параметр  $\beta$  также является функцией степени нагружения, но не зависит от химического состава стали и ее твердости. М. С. Дрозд составил таблицы и графики для определения всех параметров.

### Критические замечания

1. При вычислении предельной нагрузки, при которой впервые образуется пластический отпечаток, М. С. Дрозд исходит из применения критерия пластичности к центру площадки касания. Общеизвестно, что пластичное течение впервые начинается в точке, расположенной под центром площадки касания внутри тела на расстоянии половины радиуса круга касания. Именно в неучете этого обстоятельства лежит причина расхождения между оценками  $F_p$  по Тэйбору и по Дрозду. Если принять для стали  $E = 2 \cdot 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ , будем иметь наименьшую нагрузку для образования пластического отпечатка при вдавливании стального шарика в стальной образец по Тэйбору

$$F_p = 4,28 \cdot 10^{-8} D^2 \sigma_s^3,$$

по Дрозду

$$F_p = 1,31 \cdot 10^{-6} D^2 \sigma_s^3$$

( $D$  — в мм,  $\sigma_s$  — в кгс/мм<sup>2</sup>,  $F_p$  — в кгс).

Величина предельной нагрузки по Дрозду превышает величину предельной нагрузки по Тэйбору на полтора порядка. Прямые опыты показывают, что пластический отпечаток образуется при нагрузке, меньшей указанной М. С. Дроздом.

2. Утверждение М. С. Дрозда о том, что Мартенс и другие исследователи ошибались, считая прямые зависимости усилия вдавливания от глубины восстановленного отпечатка проходящими через начало координат, требует более солидного опытного обоснования. Действительная величина  $F_p$  настолько мала, что для ее надежного определения нужны тщательно поставленные специальные опыты.

3. Линейная зависимость усилия вдавливания от глубины восстановленного отпечатка является лишь приближенной, поэтому нельзя, как это делает М. С. Дрозд, утверждать без всяких оговорок, что новое число твердости не зависит от условий измерения (т. е. не зависит от диаметра шарика и усилия вдавливания). Можно только утверждать, что эта независимость наблюдается при изменении параметров опыта в некоторой ограниченной области, пределы которой подлежат опытному выяснению. Уже Мартенс отмечал, что при дальнейшем увеличении усилия вдавливания прямая переходит в кривую, чаще всего обращенную вогнутостью вверх.

4. Формула (147) содержит не диаметры восстановленных отпечатков, а их глубины, что означает серьезное изменение конструкции приборов Бриелля. М. С. Дрозд указал в дальнейшем на возможность применения для измерения новой твердости приборов Роквелла [16].

5. Наличие в знаменателе формулы (147) разности двух малых величин — глубин двух восстановленных отпечатков — является крайне невыгодным для точности определения нового числа твердости. Когда вычитаемое близко к уменьшаемому, незначительная погрешность в числах влечет за собой очень большую относительную погрешность разности, которая будет во столько же раз больше относительной погрешности отдельных чисел, во сколько раз сама разность меньше данного числа. Для повышения точности числа твердости надо или повышать точность измерения глубин, что очень трудно сделать, или существенно увеличивать большую нагрузку, что также сопряжено с затруднениями. Применение больших нагрузок неудобно прежде всего с практической точки зрения и, кроме того, оно может оказаться принципиально невозможным в силу ощутимого отклонения диаграммы вдавливания от прямой линии.

6. Преобразование формулы с введением безразмерных параметров не может повысить точность определения твердости, вопреки предположению М. С. Дрозда. Возможны два варианта применения формулы (148):

а) глубина невосстановленного отпечатка  $t = h + w$  вычисляется, как обычно, по его диаметру. Величины  $w$  и  $w_1$  определяются по формуле Герца,  $m$  находят для данной стали по графику в зависимости от  $F/D^2$ , параметр  $\beta$  находят по таблице Дрозда (для случая  $F/D^2 = 5$ );

б) глубину восстановленного отпечатка находят прямым измерением. Упругие деформации вычисляются по формуле Герца, что позволяет также найти значение  $m$ . Параметр  $\beta$  отыскивают в таблице М. С. Дрозда.

Способ «а» применим только в том случае, если заранее известен сорт стали, способ «б» применим для любой стали, независимо от ее химического состава и твердости.

Легко видеть, как сильно возросла роль чисто расчетных величин по сравнению с методом Бринелля. Значения параметров  $m$  и  $\beta$  установлены эмпирически с ограниченной точностью, которая не была автором оценена. Все это заставляет относиться с некоторой осторожностью к формуле (148) М. С. Дрозда. Необходимо, чтобы его результаты получили подтверждение в исследованиях других авторов.

7. Метод Бринелля прост как в отношении измерений, так и в отношении вычислений, но требует соблюдения некоторых, легко выполнимых условий нагружения. Метод, предлагаемый М. С. Дроздом, более сложен в отношении измерений и вычислений, однако он не предъявляет очень жестких требований к условиям нагружения. Последнее преимущество не является решающим, так как сам М. С. Дрозд признает, что при огромном числе измерений твердости в лабораторной и заводской практике «целесообразно иметь хорошо выверенный прибор, обеспечивающий надежные замеры не при любых, а при нескольких сочетаниях нагрузки и диаметра шарика» [14]. Сопоставляя оба метода, мы окончательно приходим к выводу, что метод Бринелля является более простым и удобным.

8. Теория М. С. Дрозда ценна рядом высказанных им положений, которые могут быть исходным пунктом дальнейших исследований.

## Б. ВДАВЛИВАНИЕ ШАРИКА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

### 15. ТЕОРИЯ ДЮ ТУА МЕЙЕРА (1951 г.) [68]

Твердость по шкале В Роквелла, выражаемая в условных единицах, вычисляется как линейная функция разности глубин, на которые вдавливаются стальной шарик диаметром 1/16 дюйма (1,588 мм) под действием двух последовательно прилагаемых нагрузок — предварительной, 10 кгс и основной, 90 кгс:

$$HRB = 130 - 500(h - h_0), \quad (149)$$

где  $h_0$  мм — глубина вдавливания под действием предварительной нагрузки  $F_0 = 10$  кгс, измеряемая при ее наличии;

$h$  мм — глубина вдавливания под действием общей нагрузки  $F = F_0 + 90 = 100$  кгс, измеряемая после снятия основной нагрузки 90 кгс при наличии предварительной нагрузки.

Глубина  $h$  есть разность глубины вдавливания  $h'$  под действием общей нагрузки, измеренной при ее наличии, и упругого восстановления  $h_e$ , происходящего после снятия основной нагрузки:

$$h = h' - h_e. \quad (150)$$

## Вычисление разности глубий $h' - h_0$

Будем пренебрегать явлением образования наплывов и вмятин у края отпечатка, а также изменением диаметра отпечатка при приложении и снятии нагрузки. Рассмотрим сначала образование отпечатка под действием предварительной нагрузки. Введем обозначения радиусов кривизны, указанные на рис. 29.

Имеем приближенные выражения

$$h_0 \approx \frac{r_k^2}{2R_k}, \quad (151)$$

$$h_k \approx \frac{r_k^2}{2R_k}. \quad (152)$$

Глубина

$$h_0 = h_k + h_k^{(e)}, \quad (153)$$

где  $h_k^{(e)}$  — упругое восстановление, равное удвоенной упругой деформации шарика или металла

$$h_k^{(e)} = \frac{2,74}{4} \frac{F_0}{r_k} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right), \quad (154)$$

где  $E_b$  — модуль упругости материала шарика;

$E_m$  — то же, испытываемого тела.

В соответствии с формулами (152) и (154) глубина  $h_0$  при приложении предварительной нагрузки будет равна

$$h_0 = \frac{r_k^2}{2R_k} + \frac{2,74}{4} \frac{F_0}{r_k} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right). \quad (155)$$

Аналогично выразится глубина  $h'$  при приложении общей нагрузки и поэтому для интересующей нас разности можно написать

$$h' - h_0 = \frac{r_g^2}{2R_g} - \frac{r_k^2}{2R_k} + \frac{2,74}{4} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \left( \frac{F}{r_g} - \frac{F_0}{r_k} \right), \quad (156)$$

где  $r_g$  — радиус отпечатка, образованного под действием общей нагрузки;

$R_g$  — радиус кривизны восстановленного отпечатка, образованного под действием общей нагрузки.

С погрешностью, не превышающей нескольких процентов, можно считать радиусы кривизны восстановленных отпечатков  $R_g$  и  $R_k$  равными радиусу шарика. Поэтому окончательно

$$h' - h_0 = \frac{1}{2R} (r_g^2 - r_k^2) + \frac{2,74}{4} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \left( \frac{F}{r_g} - \frac{F_0}{r_k} \right). \quad (157)$$

## Вычисление упругого восстановления

При снятии основной нагрузки, т. е. при переходе от общей нагрузки к предварительной, происходит упругое восстановление отпечатка. Для того чтобы вычислить величину этого восстановления, рассмотрим упругую деформацию при вдавливании шара радиусом  $R$  в шаровую лунку с радиусом кривизны  $R_g$  под действием силы  $F_0$ . Радиус кривизны поверхности касания обозначим  $R_1$ . Геометрические соотношения на рис. 30 для

наглядности преувеличены. Радиус поверхности касания при приложении нагрузки  $F_0$  равен

$$r'_k = 1,11 \left[ \frac{F_0}{2} \cdot \frac{R_g R}{R_g - R} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \right]^{1/3}.$$

Для  $r_g$  мы имеем аналогичную формулу

$$r_g = 1,11 \left[ \frac{F}{2} \cdot \frac{R_g R}{R_g - R} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \right]^{1/3}.$$

Из сопоставления обеих формул вытекает соотношение:

$$r'_k = r_g \left( \frac{F_0}{F} \right)^{1/3}. \quad (158)$$

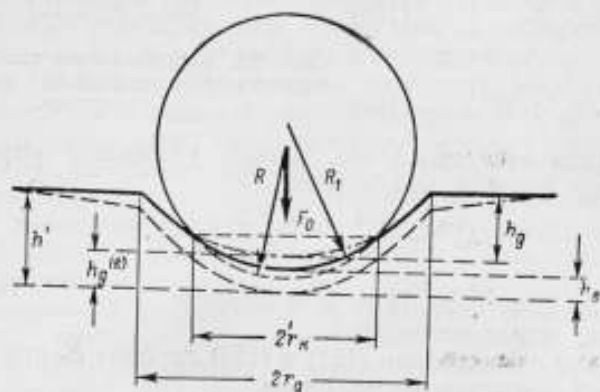


Рис. 30. Восстановление шарика и отпечатка, образованного под действием общей нагрузки.

Сделаем правдоподобное предположение, что край отпечатка при приложении предварительной нагрузки не изменяет заметно того положения, которое он занимает после удаления общей нагрузки. Радиус кривизны отпечатка за пределами контакта с шаром при приложении нагрузки  $F_0$  может быть с хорошей степенью приближения принят равным  $R_g$ . Упругая деформация шарика при приложении нагрузки  $F_0$  равна

$$\frac{(r'_k)^2}{2R} - \frac{(r'_k)^2}{2R_1}.$$

Упругая деформация металла в центре поверхности отпечатка равна

$$\frac{(r'_k)^2}{2R_1} - \frac{(r'_k)^2}{2R_g}.$$

Индикатор прибора показывает эти расстояния вдвойне. Упругое восстановление по показаниям прибора будет поэтому равно

$$h_e = h_g^{(e)} - (r'_k)^2 \left[ \frac{R_1 - R}{RR_1} \right] - (r'_k)^2 \left[ \frac{R_g - R_1}{R_g R_1} \right].$$

Для того чтобы выразить  $h_e$  через удобно измеряемые величины, следует рассмотреть несколько воображаемых случаев.



а. Абсолютно жесткий шарик ( $E_b = \infty$ ) с радиусом  $R_1$  вдавливаются в лунку радиуса  $R_g$  силой  $F_0$  до тех пор, пока радиус проекции поверхности касания не станет равным  $r'_k$ . Тогда

$$r'_k = 1,11 \left[ \frac{F_0}{2} \cdot \frac{R_g R_1}{R_g - R_1} \cdot \frac{1}{E_m} \right]^{2/3},$$

где  $E_m$  — модуль упругости металла.

б. Шарик радиусом  $R$  из материала с модулем упругости  $E_b$  вдавливается силой  $F_0$  в лунку радиуса  $R_1$  в абсолютно жестком металле ( $E_m = \infty$ ) до тех пор, пока радиус проекции поверхности касания не станет равным  $r'_k$ . Тогда

$$r'_k = 1,11 \left[ \frac{F_0}{2} \cdot \frac{R R_1}{R_1 - R} \cdot \frac{1}{E_b} \right]^{2/3}.$$

Подставляя значения  $R_g R_1 / (R_g - R_1)$  и  $R R_1 / (R_1 - R)$  из этих выражений в ранее полученную формулу для  $h_e$ , получим

$$h_e = h'_k - \frac{1,37}{2} \cdot \frac{F_0}{r'_k} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right).$$

Исключая  $r'_k$  с помощью соотношения (158) и перегруппировывая члены, найдем

$$h_e = \frac{2,74}{4} \cdot \frac{F}{r_g} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \left[ 1 - \left( \frac{F_0}{F} \right)^{2/3} \right]. \quad (159)$$

#### Твердость по шкале В Роквелла

Объединяя формулы (158) и (159), получаем выражение для разности глубин, входящей в основную формулу (148) для вычисления твердости

$$h = h' - h_0 - h_e = \frac{1}{2R} (r_g^2 - r_k^2) + \frac{2,74}{4} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right) \left[ \frac{F}{r_g} \left( \frac{F_0}{F} \right)^{2/3} - \frac{F_0}{r_k} \right]. \quad (160)$$

Используя это выражение и закон Мейера, будем иметь для твердости по шкале В Роквелла

$$HRB = 130 - 250 \frac{F^{2/n} - F_0^{2/n}}{R^{(4/n)-1} (4A)^{2/n}} - 343 \left[ F^{1-\frac{1}{n}} \left( \frac{F_0}{F} \right)^{2/3} - F_0^{1-\frac{1}{n}} \right] \times \frac{(4A)^{1/n}}{R^{1-\frac{2}{n}}} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{1}{E_b} \right). \quad (161)$$

Последним членом можно пренебречь, поэтому получаем

$$HRB = 130 - 250 \frac{F^{2/n} - F_0^{2/n}}{R^{(4/n)-1} (4A)^{2/n}}. \quad (162)$$

#### Эмпирическая формула Пека — Ингерсона (1939 г.)

Пек и Ингерсон [87] дали эмпирическую формулу

$$\frac{h - h_0}{D} = \left[ \frac{\xi (F - F_0)}{\sigma_0 D^2} \right]^{1/m}, \quad (163)$$

где  $\xi$  и  $m$  — безразмерные константы;

$\sigma_0$  — константа материала, имеющая размерность напряжения.

Из сопоставления формул (162) и (149) находим

$$\frac{h-h_0}{D} = \frac{F^{2/n} - F_0^{2/n}}{4R^{4/n} (4A)^{2/n}}$$

Учитывая ограниченность пределов изменения переменных, можно, не вводя серьезных погрешностей, записать правую часть равенства несколько иначе:

$$\frac{h-h_0}{D} \approx \frac{(F-F_0)^{2/n}}{4R^{4/n} (4A)^{2/n}} = \left( \frac{F-F_0}{4^{n/2} R^{2n} A} \right)^{2/n}$$

Полученная зависимость совпадает с эмпирической формулой Пека — Ингерсона, если положить

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{m} \quad \text{и} \quad \frac{\xi}{\sigma_0} = \frac{1}{4^{n/2} A}$$

### Критические замечания

Дю Туа Мейер уделил большое внимание вычислению упругих деформаций, однако в конце концов он ими пренебрегает и получает формулу (161), которую очень легко найти, исходя из закона Мейера. Покажем, как это можно сделать.

Для отпечатка, возникающего под действием общей нагрузки, имеем, во-первых, геометрическую закономерность

$$h \approx \frac{r_g^2}{2R}$$

и, во-вторых, закон Мейера

$$F = AD^2 \left( \frac{dg}{D} \right)^n = 4A \frac{r_g^n}{R^{n-2}}$$

Аналогично для отпечатка, возникающего под действием предварительной нагрузки, имеем два соотношения:

$$h_0 \approx \frac{r_h^2}{2R}; \quad F_0 = 4A \frac{r_h^n}{R^{n-2}}$$

Исключая  $h$  и  $h_0$  из формулы (149) с помощью этих четырех выражений, получим формулу (162).

### 16. ТЕОРИЯ ТЭЙБОРА (1948 г.) [97]

Если пренебрегать деформациями вокруг отпечатка (образование «наплыва» или «завала»), а также упругим восстановлением отпечатка, нетрудно установить соотношение между твердостью по шкале В Роквелла и твердостью по Мейеру. Глубина  $t$  отпечатка шарика диаметром  $D$  равна

$$t \approx \frac{d^2}{4D}$$

Среднее давление на поверхности отпечатка, иначе твердость по Мейеру,

$$HM = \frac{4F}{\pi d^2}$$

Сопоставляя обе формулы, находим для глубины отпечатка выражение

$$t = \frac{F}{HM} \cdot \frac{1}{\pi D}$$

Твердость по шкале В Роквелла вычисляется по формуле

$$HRB = c_1 - ct.$$

После подстановки значения  $t$  получаем окончательно искомое соотношение между твердостями

$$HRB = c_1 - \frac{c_2}{HM}. \quad (164)$$

Значения констант автором не указаны, но как видно из вывода, формула является грубо приближенной.

#### 17. ФОРМУЛА В. В. ВАРНЕЛЛО (1949 г.)

Опытное исследование зависимости между глубиной погружения шарика при измерении твердости по шкале В Роквелла и глубиной отпечатка при измерении твердости по Бринеллю позволила В. В. Варнелло [3] установить следующую приближенную формулу:

$$HRB = 130 - \frac{1450(5 + \delta_p)}{HB}, \quad (165)$$

где  $\delta_p$  — равномерное удлинение, выраженное в процентах.

Как указал Г. П. Зайцев [20], эта формула имеет большое принципиальное значение: «При одинаковой глубине  $h^*$  вдавливания шарика в металл по отношению к начальной плоскости тела диаметр отпечатка и его глубина  $h$  зависят от равномерного удлинения  $\delta_p$  и будут тем больше, чем меньше  $\delta_p$ . Так как твердость по Роквеллу определяется глубиной вдавливания  $h^*$ , а не глубиной отпечатка, между  $HRB = f_1(F, D, h^*)$  и  $HB = f_2(F, D, h)$  не может существовать зависимость  $HB = f(HRB)$ , но так как  $h = f_3(h^*, \delta_p)$ , то должна существовать зависимость вида  $HB = \varphi(HRB, \delta_p)$ »

### В. ВДАВЛИВАНИЕ КОНУСА

#### 18. ТВЕРДОСТЬ ПО ЛУДВИКУ (1907 г.)

Твердость по Бринеллю, измеряемая определенным шариком, зависит от относительного диаметра отпечатка. Для того чтобы устранить этот недостаток, Лудвик в 1907 г. предложил измерять твердость по отпечаткам острого конуса [81]. Все отпечатки данного конуса подобны между собой и числа твердости поэтому не зависят от размеров отпечатка. Твердость по Лудвику есть отношение усилия вдавливания к поверхности отпечатка конического наконечника

$$HL = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (166)$$

где  $\alpha$  — угол раскрытия конуса.

Лудвик производил измерения со стальными коническими наконечниками с  $\alpha = 90^\circ$ . Метод Лудвика имеет два крупных недостатка, а именно:

- а) значительное вспучивание материала у краев отпечатка;
- б) быструю изнашиваемость вершины наконечника, которая приводит к нарушению подобия отпечатков.

Вдавливание острого конуса позволяет определять некоторые механические характеристики с помощью эмпирических формул, перечисление которых выходит за рамки настоящего обзора. Ограничимся только немногими примерами.

Н. Н. Давиденков, С. Е. Беляев, М. П. Марковец [12] дали формулу для вычисления предела прочности

$$\sigma_n = 0,32HL - 16, \quad (167)$$

в которую входит твердость по Лудвику.

Б. А. Вандышев и Ф. С. Савицкий [2] нашли эмпирическую зависимость между пределом прочности и глубиной  $t$  вдавливания в металл конуса с углом при вершине  $90^\circ$  под нагрузкой 150 кгс

$$\sigma_n = \frac{6,4}{t^2}. \quad (168)$$

Разность между значениями предела прочности, вычисленными по глубине вдавливания и определенными при испытаниях на растяжение, составляет в среднем 5%.

Тамман и Мюллер [98] предложили формулу для определения предела текучести по измерению диаметра  $D$  деформированной зоны вокруг отпечатка острого конуса

$$\sigma_s = \frac{4F}{\pi D^2}. \quad (169)$$

Проверкой этой формулы занимался ряд авторов. Л. А. Гликман и Н. Максимов [6] измеряли диаметр после сошлифования валика напльва вокруг отпечатка. Для 17 исследованных образцов сталей погрешность вычисления предела текучести в большинстве случаев не превышала 4%, изредка достигая 6—8%. Ф. Ф. Витман [4] измерял диаметр при помощи интерференционного микроскопа и нашел, что для сближения результата вычисления с действительным пределом текучести необходимо брать диаметр не наибольшего, а меньшего интерференционного кольца, выбираемого по условию, чтобы расстояние между ним и соседним, большим, кольцом было равно 25 мк. При измерениях с соблюдением этого условия погрешность вычисления для ряда цветных металлов и сталей в большинстве случаев не превышала 5%.

Интересная работа была сделана И. Н. Тылевичем [52]. При вдавливании конического наконечника в металл его поверхностный слой толщиной  $h_0$ , ограниченный окружностью радиуса  $r$ , претерпевает деформацию, при которой выделенный «диск» превращается в «коническую воронку» с образующей длиной  $l$ . Первоначальный радиус диска остается при этом, как показывают опыты, без изменения, а толщина стенок воронки  $h_1$  оказывается меньше первоначальной толщины диска. Объем металла при пластической деформации не изменяется, так что имеет место равенство

$$\pi r^2 h_0 = \pi r l h_1.$$

Утонение рассматриваемого слоя равно

$$q = \frac{h_0 - h_1}{h_0} = 1 - \frac{h_1}{h_0} = 1 - \frac{r}{l} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2},$$

где  $\alpha$  — угол при вершине воронки, равный углу при вершине конуса.

Для получения деформации сжатия поверхностного слоя, эквивалентной одноосному растяжению до предела текучести, необходимо, чтобы утонение при вдавливании было численно равно соответствующему сужению при растяжении. Условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$  определяют при удлинении  $\delta = 0,2\%$ , которому соответствует приблизительно такое же сужение  $\psi = 0,2\%$ . «Учитывая, что для значительной группы малоуглеродистых и некоторых низколегированных сталей остаточная деформация, отвечающая окончанию площадки текучести, составляет примерно 1%, принимаем в качестве обобщенного допущения на удлинение

величину 0,4%» [52]. Из уравнения  $q = 0,004$  можно найти  $\alpha = 170^\circ$ . Поскольку отпечатки тупого конуса имеют нечеткий контур и требуют поэтому тщательной полировки испытуемой поверхности, конус для практических измерений был заменен твердосплавной квадратной пирамидой с углом между противоположными гранями, равным  $170^\circ$  (« $\alpha$ -пирамида» — по терминологии автора). По способу наименьших квадратов установлена линейная зависимость предела текучести группы сталей, применяемых в судостроении, от твердости по Мейеру, найденной по отпечаткам пирамиды:

$$\sigma_s = 0,33HM - 1. \quad (170)$$

### 19. ТЕОРИЯ ХЕНКИНСА (1925 г.)

Хенкинс [73] сделал попытку учесть влияние сил трения при вдавливании конуса, пользуясь предположением, что существует некоторое давление течения  $p$ , величина которого не зависит от величины угла при вершине конуса. На элемент  $dS$  поверхности конуса действует нормальная сила  $p dS$  и тангенциальная сила трения  $\mu p dS$ , где  $\mu$  — коэффициент трения (рис. 31). Составляющие этих сил в горизонтальном направлении уравниваются в силу симметрии. Вертикальные составляющие действующих сил после интегрирования по поверхности конуса должны дать величину усилия вдавливания

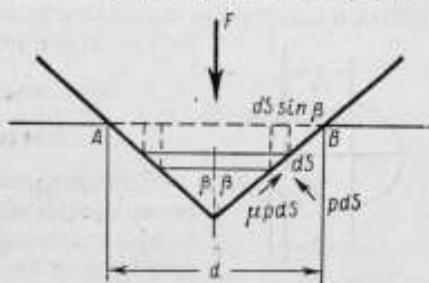


Рис. 31. Вдавливание конуса.

$$F = \int (p dS \sin \beta + \mu p dS \cos \beta) = p(1 + \mu \operatorname{ctg} \beta) \int dS \sin \beta.$$

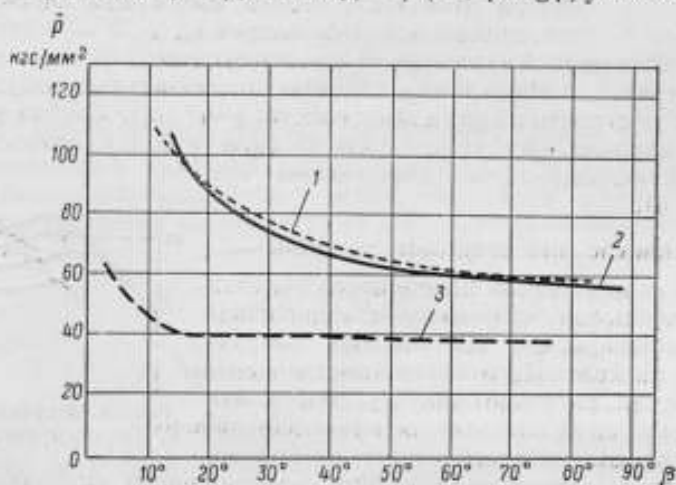


Рис. 32. Зависимость среднего давления от половины угла вдавливаемого конуса.

Так как  $dS \sin \beta$  есть проекция элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную усилию вдавливания, то интеграл от этой величины по боковой поверхности конуса будет равен проекции самого отпечатка, т. е.  $\pi d^2/4$ . Таким образом,

$$F = p(1 + \mu \operatorname{ctg} \beta) \frac{\pi d^2}{4}.$$

или иначе

$$p = \frac{4F}{\pi d^2 (1 + \mu \operatorname{ctg} \beta)} \quad (171)$$

В числителе выражения (171) находится твердость по Мейеру, вычисленная для отпечатка конуса, которая выражает среднее давление без учета трения. Величина  $p$  есть среднее давление на поверхности отпечатка, вычисленное с учетом влияния сил трения. Как показали вычисления Хенкинса, коэффициент трения лежит в пределах  $0,2 \div 0,4$ . Кемпбелл и Уайт [66] ставили специальные опыты по измерению сил трения посредством измерения крутящего момента, необходимого для вращения шарика, находящегося под нагрузкой. По их данным, действительное трение является значительно меньшим, чем это предполагает Хенкинс. Бишоп, Хилл и Мотт [63] произвели опыты, результаты которых приведены на рис. 32. При отсутствии смазки экспериментальная кривая 2 удовлетворительно отображается формулой Хенкинса (кривая 1). При хорошей смазке и изменении половины угла при вершине конуса от  $15$  до  $80^\circ$  давление остается почти постоянным (кривая 3).

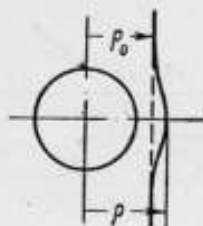


Рис. 33. Искажения прямых на поверхности металла вблизи отпечатка конуса.

## 20. ТЕОРИЯ П. О. ПАШКОВА (1950 г.) [43]

### Измерение деформаций вокруг отпечатка

Вдавливание конуса производится на шлифованной поверхности образца, на которую предварительно нанесены легкие параллельные царапины. После образования отпечатка царапины вблизи него оказываются искривленными (рис. 33). Величина главной тангенциальной деформации вычисляется по формуле  $\epsilon_t = \ln(q/q_0)$ . Имея несколько царапин на разном расстоянии  $q_0$  от центра отпечатка, можно найти зависимость главной тангенциальной деформации от  $q_0/r$  — относительного удаления неискаженной царапины от кромки отпечатка ( $r$  — как всегда, радиус отпечатка). Для нахождения величины главной радиальной деформации необходимо построить график зависимости  $q = f(q_0)$ . Определение тангенса угла наклона касательной кривой  $\operatorname{tg} \alpha = dq/dq_0$  позволяет затем найти главную радиальную деформацию как  $\epsilon_r = \ln(\operatorname{tg} \alpha)$ .

### Направление пластического течения

Если на шлифованной поверхности образца нанести небольшой отпечаток вдавливанием конуса, покрасить его внутреннюю поверхность жидкой краской, а затем, после высыхания краски, повторно вдавить конус под большой нагрузкой, то закрасенная поверхность первого отпечатка опустится на дно нового большего отпечатка. Диаметр закрасенного отпечатка только слабо увеличивается, почти не изменяясь. Это наблюдение позволяет представить пластическое течение при вдавливании конуса так, как указано на рис. 34, на котором показано в деформированной зоне вокруг отпечатка типичное искривление волокон, параллельных первоначальной плоскости тела. Вблизи поверхности контакта с конусом волокна во всех исследованных случаях становятся практически параллельными образующей конуса и, следовательно, направление максимальных сдвигов близко к направлению образующей конуса. В свою



Рис. 34. Искривления прямых под отпечатком конуса.

очередь, направление максимальных касательных напряжений должно совпадать с направлением максимальных сдвигов, т. е. приблизительно с образующей конуса.

### Твердость по Лудвику

Общее выражение для силы вдавливания наконечника

$$F = \frac{s_n}{\mu} \int_{(S)} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{e_t}{e_r} \right) \sin 2\varphi dS$$

для конуса может быть упрощено, потому что угол  $\alpha$  является постоянным для всех элементов конической поверхности, и интеграл можно вычислить:

$$F = \frac{\cos \alpha_0 + \mu \sin \alpha_0}{\mu} \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{e_t}{e_r} \right) s_n S \sin 2\varphi, \quad (172)$$

где  $\alpha_0 = 90 - \beta$  и  $\beta$  — половина угла при вершине конуса;

$S$  — поверхность отпечатка, равная  $S = S_0 / \cos \alpha_0$ ;

$S_0$  — площадь проекции отпечатка,  $S_0 = \pi d^2 / 4$ .

После подстановки всех значений получим для среднего давления

$$\bar{p} = \frac{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha_0}{3\mu} \left( 2 + \frac{e_t}{e_r} \right) s_n \sin 2\varphi. \quad (173)$$

Опыты показали, что при вдавливании конуса Лудвика (угол раскрытия  $90^\circ$ ) отношение тангенциальной деформации к радиальной приблизительно равно  $e_t/e_r = -0,5$ .

Угол  $\varphi \approx 45^\circ$ , поскольку направления главных касательных напряжений составляют угол  $45^\circ$  с главными нормальными напряжениями. Окончательно имеем

$$\bar{p} = \frac{1 + \mu}{2\mu} s_n. \quad (174)$$

Судя по литературным данным, коэффициент трения  $\mu \approx 0,15 \div 0,2$ . После подстановки значения  $\mu = 0,2$  находим соотношение  $\bar{p} \approx 3s_n$ , которое хорошо оправдывается опытом. Небольшое уточнение в коэффициенте трения могло бы привести «и к абсолютно точному совпадению».

## 21. ТЕОРИЯ Г. П. ЗАЙЦЕВА (1950 г.)

### Закон вдавливания конуса

Г. П. Зайцев и С. А. Смолич [27] обобщили закон Мейера на случай вдавливания острого конуса. Сила вдавливания и диаметр отпечатка конического наконечника связаны формулой  $F = bd^2$ , верной для любых конусов и металлов, которая является выражением закона подобия. Аналогичная формула применима и при вдавливании шариков, если предположить, что шарики вдавливаются в любые металлы до получения одинаковых значений относительно диаметра отпечатка  $d/D$ .

Это становится очевидным, если закон Мейера записать в следующем виде:

$$F = A \left( \frac{d}{D} \right)^{n-2} d^2.$$

При постоянном значении относительного диаметра отпечатка будем иметь  $F = cd^2$ .

Коэффициенты  $b$  и  $c$  скрывают в себе параметры условий измерения: константы пластичности  $A$  и  $n$ , угол  $\alpha$  при вершине конуса, в первом случае, и угол вдавливания  $\varphi = \arcsin(d/D)$  — во втором. Как известно, числа твердости, полученные при вдавливании пирамиды с углом между гранями  $\alpha = 2\beta = 136^\circ$ , почти совпадают с числами твердости по Бринеллю, полученными при относительном диаметре отпечатка 0,375, что отвечает углу вдавливания  $\varphi = 44^\circ$  (рис. 35). Поскольку между наконечниками пирамидальной и конической формы не имеется никакого принципиального различия, то на основании приведенного факта можно установить формулу для вдавливания конического наконечника. Из рис. 35 видим, что угол  $\beta = 90 - \varphi/2$  и, следовательно,

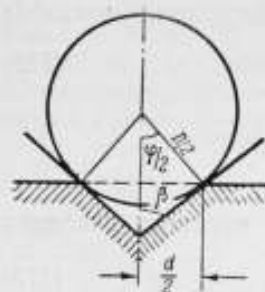


Рис. 35. Вдавливание шарика и конуса.

$$F = Ad^2 \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2} = Ad^2 \sin^{n-2} \frac{\varphi}{2} = Ad^2 \cos^{n-2} \beta. \quad (175)$$

Эта формула верна пока угол конуса достаточно велик и пока не возникает скольжения металла по поверхности вдавливаемого конуса. В этом случае около отпечатка наблюдается вмятие первоначальной поверхности. При остром угле конуса металл с низким коэффициентом внутреннего трения будет скользить по поверхности наконечника и около отпечатка появится высокий резко очерченный венчик. В этом случае формула (175) не применима. Подставляя полученное значение силы вдавливания в формулу (165), определяющую твердость по Лудвику, получим выражение

$$HL = \frac{4A_k}{\pi} \sin \beta \cos^{n-2} \beta, \quad (176)$$

устанавливающее связь между числом твердости, углом конуса и параметрами пластичности. Размерному параметру  $A_k$  приписали индекс «к» для того, чтобы подчеркнуть необходимость определения его значения по опытам вдавливания острого конуса.

#### Метод двух конусов

Для ряда образцов из различных металлов проводились испытания на растяжение для определения предельного равномерного удлинения, пределов прочности и текучести. На этих же образцах производились опыты вдавливания двух конусов с углами при вершине  $90^\circ$  и  $135,07^\circ$ . После графической обработки полученных числовых результатов были установлены следующие эмпирические соотношения:

$$\sigma_n = 0,347 A_k; \quad (177)$$

$$\delta_p = n - 2. \quad (178)$$

Подставляя эти значения в формулу (175), можно вывести выражения, которыми следует пользоваться для определения предела прочности и равномерного удлинения по результатам вдавливания двух конусов:

$$\delta_p = \frac{\lg \left[ \frac{F_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{F_1} \right]}{\lg \left( \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \right)}, \quad \sigma_n = 0,347 \frac{F_1}{d_1^2} \cdot \frac{1}{\cos^{n-2} \beta}. \quad (179)$$



С практической точки зрения отношение диаметров целесообразно заменить отношением глубин вдавливания конусов при возрастании усилия вдавливания от некоторого начального значения до заданного. Эти глубины могут быть непосредственно отсчитаны по индикатору прибора Роквелла.

Как показали результаты исследования, точность определения механических характеристик очень невелика; погрешность при определении  $\delta_p$  достигает 30% и  $10 \div 15\%$  при определении  $\sigma_n$ .

### Г. ВДАВЛИВАНИЕ КОНУСА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

#### 22. ТЕОРИЯ ТЭЙБОРА (1950 г.) [97]

Если пренебречь деформациями вокруг отпечатка (образование «напльва» или «завала»), а также его упругим восстановлением, можно установить простое соотношение между твердостью по шкале С Роквелла и твердостью по Мейеру. Твердость по шкале С Роквелла вычисляется по формуле

$$HRC = c_1 - ct,$$

где  $t$  — разность глубин вдавливания под действием общей и предварительной нагрузок.

Величина  $t$  может быть приближенно выражена через диаметр отпечатка  $d$  и угол раскрытия конуса  $\alpha$  как

$$t \approx \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Твердость по Мейеру равна

$$HM = \frac{4F}{\pi d^2}$$

и, следовательно, из сопоставления обеих формул будем иметь

$$t \approx \sqrt{\frac{F}{\pi HM}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Для числа твердости по шкале С Роквелла имеем выражение,

$$HRC = c_1 - \frac{c_2}{\sqrt{HM}}. \quad (180)$$

Обработка опытных данных привела Тэйбора к аналогичной формуле для связи твердостей  $HRC$  и  $HB$  (рис. 36)

$$HRC = 124 \left( 1 - \frac{12.2}{\sqrt{HB}} \right). \quad (181)$$

На рис. 36 сплошная линия — эмпирическая кривая, пунктирная — построенная по уравнению (181).

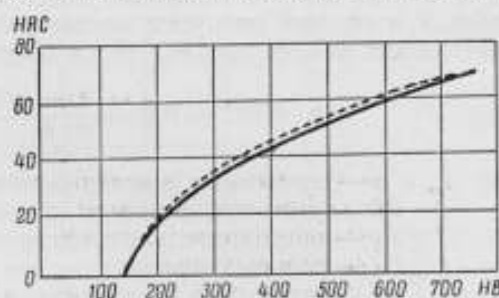


Рис. 36. Связь между твердостью по шкале С Роквелла и твердостью по Бринеллю.

Сплошная линия — эмпирическая кривая, пунктирная линия — кривая по уравнению (181).

При построении теории твердости по шкале С Роквелла Г. П. Зайцев исходит из двух предпосылок.

1. Форма конца конуса при достаточной глубине вдавливания почти не влияет на диаметр отпечатков. Это позволяет пользоваться формулой Г. П. Зайцева и С. А. Смолича (175), выведенной первоначально для острых конусов, также и для конусов с закругленной или затупленной вершиной.

2. Отношение глубины отпечатка, отсчитываемой от начальной поверхности тела, к полной глубине отпечатка, отсчитываемой от краев наплыва около отпечатка, всегда меньше единицы. Величина отношения зависит от способности металла к относительному упрочнению — от безразмерной константы пластичности. При определении твердости по шкале С Роквелла приходится иметь дело с достаточно твердыми металлами, у которых  $2 < n < 2,2$  и отношение можно считать постоянным  $\gamma \approx 0,85$ .

При выводе формул надо рассмотреть отдельно три случая.

а. Случай «мягких металлов» ( $HRC < 33$ ). При приложении предварительной и полной нагрузок наконечник вдавливается так глубоко, что поверхность конуса соприкасается с металлом. В этом случае

$$HRC = 100 - \frac{50\gamma m}{\sin \beta} \frac{\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}}{\sqrt{A_k}} \cos^{\frac{4-n}{2}} \beta, \quad (182)$$

где  $A_k$  и  $n$  — константы пластичности при вдавливании острого конуса;

$2\beta$  — угол при вершине конуса;

$F_1$  — предварительная нагрузка;

$F_2$  — общая нагрузка;

$m$  — отношение плеч рычажка, передающего перемещение наконечника штифту индикатора.

б. Случай «твердых металлов» ( $33 < HRC < 89$ ). При приложении предварительной нагрузки с металлом соприкасается только сферическая часть наконечника («закругленная вершина»), при приложении полной нагрузки с металлом соприкасается и поверхность конуса. В этом случае

$$HRC = 100 - \frac{50\gamma m}{\sin \beta} \left\{ \frac{\sqrt{F_2}}{\sqrt{A_k}} \cos^{\frac{4-n}{2}} \beta - 2R \left[ 1 - \sin \beta \sqrt{1 - \left( \frac{F_1}{4R^2 A_m} \right)^{\frac{2}{n}}} \right] \right\}, \quad (183)$$

где  $R$  — радиус закругления;

$A_m$  — константа при вдавливании шарика, остальные обозначения прежние.

в. Случай «особо твердых металлов» ( $89 < HRC < 100$ ). При приложении предварительной и полной нагрузок наконечник вдавливается на такую небольшую глубину, что с металлом соприкасается только его сферическая часть. В этом случае

$$HRC = 100 - 10\gamma m R \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{F_1}{4R^2 A_m} \right)^{\frac{2}{n}}} - \sqrt{1 - \left( \frac{F_2}{4R^2 A_m} \right)^{\frac{2}{n}}} \right], \quad (184)$$

где все обозначения прежние.

Формулы (182)—(184) были применены Г. П. Зайцевым [24, 25] для анализа погрешностей, возникающих при отклонении величин  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $m$ ,  $R$  и  $2\beta$  от их номинальных значений. Результаты экспериментов [44, 45, 50] удовлетворительно согласуются с теоретическими значениями, вычисленными по приведенным формулам.

## Д. ВДАВЛИВАНИЕ ПИРАМИДЫ

### 24. ТЕОРИЯ ТЭЙБОРА (1950 г.) [97]

При применении пирамидальных, а также конических наконечников отпечатки при любых нагрузках имеют геометрически подобную форму. Среднее давление, которое вызывает пластичное течение материала под наконечником, является поэтому не зависящим от размеров отпечатка. Число твердости остается постоянным при изменении нагрузки в широких пределах. Это обстоятельство очень благоприятно для практики измерений, освобождая от применения стандартных нагрузок, однако при этом утрачивается возможность оценки способности металла к упрочнению.

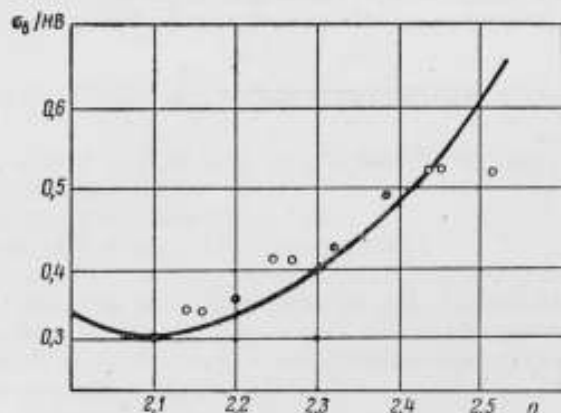


Рис. 37. Отношение предела прочности к твердости по Виккерсу.

Отношение между пределом прочности и твердостью по Виккерсу можно найти аналогично отношению между пределом прочности и твердостью по Бринеллю. Поскольку эффективная деформация при вдавливании пирамиды Виккерса равна примерно 0,08, то будем иметь

$$HV = 2,9b (0,08)^x, \quad (185)$$

$$\frac{\sigma_b}{HV} = \frac{1-x}{2,9} \left( \frac{12,5x}{1-x} \right)^x. \quad (186)$$

Тэйбор построил теоретическую кривую отношений и сопоставил ее с опытными данными (рис. 37).

### 25. ТЕОРИЯ Г. П. ЗАЙЦЕВА (1951 г.)

Г. П. Зайцев и Н. П. Славина [26] обобщили закон Мейера на случай вдавливания пирамидальных наконечников. Поскольку между наконечниками пирамидальной и конической формы нет принципиального различия, можно предполагать, что формула (175), выведенная ранее Г. П. Зайцевым и С. А. Смоличем [27] для вдавливания конусов, будет пригодна и для вдавливания пирамид. Опыты, проведенные с девятью пирамидами на шести разных металлах, подтвердили это заключение.

Сила вдавливания пирамиды

$$F = A_n d^2 \cos^{n-2} \beta, \quad (187)$$

где  $d$  — диагональ отпечатка;

$2\beta$  — угол между противоположными гранями пирамиды;

$A_n$  — размерный параметр пластичности, определяемый по опытам вдавливания квадратных пирамид.

Число твердости по квадратной пирамиде

$$HV = 2A_n \sin \beta \cos^{n-2} \beta \quad (188)$$

выражается через параметры пластичности  $A_n$ ,  $n$  и половину угла между противоположными гранями. Эта формула была применена Г. П. Зайцевым [24, 25] для анализа погрешностей, возникающих при отклонении угла пирамиды Виккерса от его номинального значения.

### ГЛАВА III

#### ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТВЕРДОСТИ

Все динамические методы измерения твердости могут быть подразделены на три основные группы:

- 1) метод ударного отпечатка шарика;
- 2) метод упругой отдачи (отскакивания);
- 3) метод качания шарика, соединенного с определенной массой (маятник), в лунке, образованной шариком на испытываемой поверхности.

Мы остановимся на рассмотрении теории только первых двух, практически наиболее важных методов. Маятниковые методы в настоящее время не имеют практического значения.

##### 26. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРИ УДАРЕ ШАРИКА

Кокадо [79] установил, что кинетическая энергия шарика до удара  $W_1$  выражается степенными функциями диаметра  $d$  и условного объема  $V_a$  отпечатка\*:

$$W_1 = a_1 d^{m_1}; \quad (189)$$

$$W_1 = a_2 V_a^{m_2}. \quad (190)$$

Показатели степеней связаны с показателем в законе Мейера соотношениями

$$m_1 = n + 2, \quad m_2 = \frac{n + 2}{4}. \quad (191)$$

Шнейдер [92] установил, что работа удара, равная разности кинетических энергий шарика до и после удара, также выражается степенной функцией диаметра отпечатка

$$W_1 - W_2 = a_3 d^{m_3}. \quad (192)$$

Максимальная сила вдавливания и диаметр ударного отпечатка связаны между собой, опять-таки, законом Мейера

$$F = AD^2 \left( \frac{d}{D} \right)^n.$$

Значения постоянных  $A$  и  $n$  при динамических испытаниях отличаются от значений при статических испытаниях: постоянная  $A$  оказывается повы-

\* Условный объем вычисляется по диаметру восстановленного отпечатка в предположении, что этот отпечаток является сегментом ударяющего шарика.

шенной, постоянная  $n$  — несколько пониженной. Проверку закона Мейера при динамических испытаниях можно провести только косвенным путем, исходя из выражений удельной работы или полной работы образования отпечатка, которые будут выведены ниже при изложении обзора Н. Н. Давиденкова. Логарифмические графики зависимости этих работ от относительного диаметра отпечатка являются прямыми линиями.

## 27. ОБЗОР Н. Н. ДАВИДЕНКОВА (1929 г.)

Обширный экспериментальный и теоретический материал разных исследователей по динамическим измерениям твердости был охвачен и обобщен Н. Н. Давиденковым в главе «Ударная твердость» его книги «Динамические испытания металла» [10]. Наибольшее внимание Н. Н. Давиденков уделил теории метода отпечатка.

### Предпосылки теории метода отпечатка

Получаемый при ударе отпечаток используется двумя способами: либо при заданной работе удара измеряют диаметр отпечатка, либо при произвольной работе удара сравнивают диаметры отпечатков на испытуемом материале и на материале с известной твердостью, служащем образцом для сравнения. Если при статических методах определения твердости необходимо измерение усилия вдавливания, то при динамических методах усилие вдавливания является переменным, и речь может идти только об измерении удельной работы удара, т. е. расхода энергии на образование единицы объема отпечатка. Задача теории состоит в установлении зависимости между работой удара и диаметром отпечатка. В основе теории лежат закон подобия и степенной закон Мейера. Оба закона были подтверждены многочисленными опытами разных исследователей.

### Работа вдавливания шарика

Работа \* выражается интегралом

$$A = \int_0^h F dh. \quad (193)$$

Усилие вдавливания определяется формулой Мейера

$$F = ad^n. \quad (194)$$

Глубина вдавливания вычисляется по геометрическим соображениям

$$h = \frac{D}{2} \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad (195)$$

где половина угла вдавливания  $\varphi$  выражается формулой

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin \left( \frac{d}{D} \right). \quad (196)$$

Дифференцируя формулу (195), найдем дифференциал глубины

$$dh = \frac{D}{4} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad (197)$$

\* До конца настоящего параграфа буква  $A$  будет обозначать работу вдавливания шарика. Чтобы избежать смешения этой величины с размерной константой  $A$ , в законе Мейера вместо последней будет применяться константа  $a$ .

Подставляя выражения (194) и (197) под знак интеграла и заменяя пределы интегрирования, получим

$$A = \int_0^h a d^n dh = \frac{a D^{n+1}}{4} \int_0^{\varphi} \sin^{n+1} \frac{\varphi}{2} d\varphi. \quad (198)$$

Постоянную  $a$  следует выразить через постоянную  $H_0$ , которая фигурирует в выражениях твердости по Бринеллю и по Мейеру (см. ниже). Именно

$$a = \frac{\pi H_0}{4 D^{n-2}}. \quad (199)$$

Работа образования отпечатка окончательно будет равна

$$A = \frac{\pi H_0}{16} D^3 \int_0^{\varphi} \sin^{n+1} \frac{\varphi}{2} d\varphi. \quad (200)$$

Интеграл не берется в замкнутой форме и может быть вычислен только методами численного интегрирования, если будут заданы численные значения  $n$  и  $\varphi$ . Нетрудно видеть, что для всех подобных отпечатков интеграл имеет одинаковую величину и потому работа вдавливания прямо пропорциональна кубу диаметра шарика.

Для случая неглубоких отпечатков можно найти приближенное значение работы вдавливания иначе. Для неглубоких отпечатков  $h \approx d^2/4D$ . Если в интеграле формулы (193) заменить переменную интегрирования диаметром отпечатка и учесть формулы (194) и (199), то получим

$$A = \frac{\pi H_0}{8 D^{n-1}} \int_0^d d^{n+1} d(d) = \frac{\pi H_0}{8(n+2)} D^3 \left(\frac{d}{D}\right)^{n+2}. \quad (201)$$

Работа вдавливания прямо пропорциональна кубу диаметра шарика и ее зависимость от относительного диаметра отпечатка выражается степенным законом, аналогичным закону Мейера.

#### Удельная работа вдавливания

Объем сегмента шара диаметра  $D$  равен

$$V = \int_0^h \frac{\pi d^2}{4} dh = \frac{\pi D^3}{16} \int_0^{\varphi} \sin^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi D^3}{24} \left(2 - 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos^3 \frac{\varphi}{2}\right). \quad (202)$$

При замене переменной интегрирования надо принять во внимание формулы (195) и (196). Удельная работа  $A_0$  есть частное от деления работы (200) на объем отпечатка (202)

$$A_0 = \frac{3}{2} H_0 \frac{\int_0^{\varphi} \sin^{n+1} \frac{\varphi}{2} d\varphi}{2 - 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (203)$$

Для подобных отпечатков, когда  $\varphi = \text{const}$ , удельная работа не зависит от диаметра шарика.

Приближенное выражение удельной работы можно найти, если исходить из приближенного выражения работы (201) и следующей формулы для объема сферического сегмента

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{3}{2} D - h\right). \quad (204)$$

Когда  $h \ll D$ , то  $h \approx d^2/4D$  и

$$V \approx \frac{\pi d^3}{32D}. \quad (205)$$

После деления формулы (201) на формулу (205) находим

$$A_v \approx \frac{4H_0}{n+2} \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2}. \quad (206)$$

Удельная работа является постоянной величиной, не зависящей от относительного диаметра отпечатка, если показатель степени в законе Мейера равен двум. Это, столь очевидное следствие приближенной формулы (206), может быть обнаружено и с помощью точной формулы (203), у которой при  $n = 2$  дробь становится равной единице.

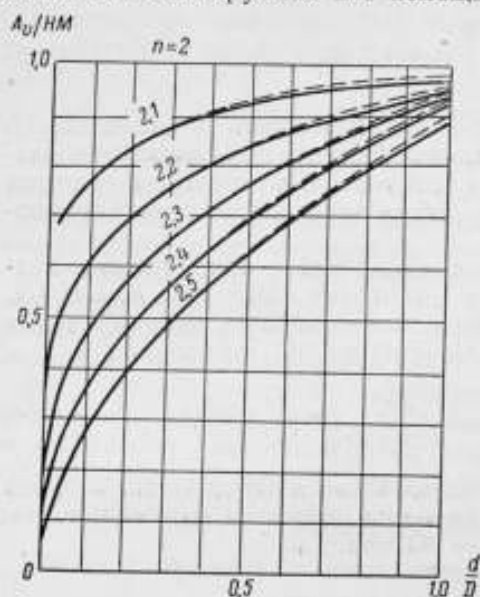


Рис. 38. Отношение удельной работы образования отпечатка к твердости по Мейеру.

$= HM = H_0$ . Если взять для вычисления отношения  $A_v/HM$  приближенную формулу (206), то получим очень простой результат

$$\frac{A_v}{HM} = \frac{4}{n+2}. \quad (208)$$

Удельная работа вдавливания в первом приближении прямо пропорциональна твердости по Мейеру. При  $n = 2$  удельная работа равна твердости по Мейеру. На рис. 38 даны кривые, построенные по точной (сплошные линии) и приближенной (штриховые линии) формулам.

#### Удельная работа и твердость по Бринеллю

Твердость по Бринеллю, если ввести постоянную  $H_0$ , равна

$$HB = H_0 \frac{\sin^n \frac{\varphi}{2}}{2(1 - \cos \frac{\varphi}{2})}.$$

#### Удельная работа и твердость по Мейеру

Твердость по Мейеру, если ввести постоянную  $H_0$ , равна

$$HM = H_0 \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2}. \quad (207)$$

Отношение удельной работы вдавливания к твердости по Мейеру является сложной функцией угла вдавливания

$$\frac{A_v}{HM} = f(\varphi),$$

выражение которой нетрудно найти, пользуясь формулами (203) и (207). При заданных  $\varphi$  и  $n$  удельная работа пропорциональна твердости по Мейеру. При  $n = 2$  имеет место равенство  $A_v =$



Отношение удельной работы вдавливания к твердости по Бринеллю является сложной функцией угла вдавливания, а именно

$$\frac{A_{\sigma}}{HB} = \frac{f(\varphi)}{\cos^2 \frac{\varphi}{4}}$$

где  $f(\varphi)$  — функция, выражающая отношение удельной работы вдавливания к твердости по Мейеру.

Если взять для вычисления приближенное значение удельной работы (206), то получим более простой результат

$$\frac{A_{\sigma}}{HB} = \frac{8}{(n+2) \left(1 + \cos \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (209)$$

Экспериментальные данные показывают, что отношение изменяется в широких пределах, имея минимум при средней твердости.

### Метод отскакивания

Высота отскакивания стального шарика может служить мерой твердости испытуемого материала, если при ударе получающиеся напряжения выходят далеко за предел упругости.

Пусть кривая  $OA$  на рис. 39 изображает усилие вдавливания в зависимости от глубины отпечатка. Уравнение кривой при небольших глубинах в соответствии с законом Мейера будет

$$F = 2^n AD^{2-n/2} h^{n/2}.$$

(При  $n = 2$  эта кривая превращается в прямую.) Если кинетическая энергия до удара  $E_1$ , то шарик вдавится в образец на такую глубину  $h_1$ , что площадь  $Oh_1F_1$  будет равняться  $E_1$ . Во второй фазе удара, когда накопленная потенциальная энергия будет освобождаться, переходя в кинетическую энергию отскакивающего шарика, глубина отпечатка будет уменьшаться («восстановление») и сила взаимодействия между образцом и шариком будет также убывать в соответствии со штриховой кривой на рисунке. Площадь  $h_1F_1m$  равна упругой энергии, накопленной в шарике и образце.

При вдавливании шарика в другой, более твердый материал, у которого параметр  $A$  имеет большую величину, кривая вдавливания  $OF_2B$  пройдет выше рассмотренной кривой  $OF_1A$ . Если кинетическая энергия шарика при ударе будет по-прежнему равна  $E_1$ , то глубина вдавливания  $h_2$  будет меньше. Упругая энергия, которая вызывает отскакивание шарика, выражается теперь площадью  $h_2F_2n$ , которая значительно больше площади  $h_1F_1m$ , если закон упругих деформаций одинаков в обоих случаях. Для родственных материалов (например для сталей разных марок) последнее условие приблизительно соблюдается и высота отскока изменяется параллельно со статической твердостью, следовательно, может служить условной мерой твердости. Для материалов с различными модулями упругости динамическая твердость не будет находиться в постоянном отношении со статической твердостью. Если вследствие очень малого модуля упругости напряжения почти или совсем не будут выходить за предел

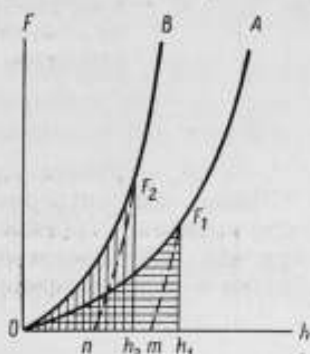


Рис. 39. Измерение твердости двух разных металлов по методу отскакивания.

упругости, энергия удара почти целиком превращается в потенциальную и высота отскока оказывается близкой к 100%. В этом кроется разгадка парадокса резины, оказывающейся при пробе отскоком тверже стали. К ней эта проба вообще неприменима. Твердость стекла, материала, не имеющего вовсе предела упругости, также оказывается выше твердости стали, хотя сталью можно царапать стекло.

Итак, для пластичных тел высота отскакивания прямо пропорциональна статической твердости, а для хрупких тел этой пропорциональности нет. Это можно показать более строго, если исходить из теории Герца, применимой как к статическому, так и к динамическому сдавливанию упругих тел.

В момент наибольшего нажатия при ударе радиус кривизны отпечатка равен радиусу кривизны слегка сплюсненного шарика. В процессе отделения шарика от отпечатка радиус кривизны отпечатка увеличится до величины  $\varrho$ , а радиус сплюсненного шарика — уменьшится до своей первоначальной величины  $R < \varrho$ . Среднее давление на поверхности внутреннего соприкосновения двух упругих шариков радиусов  $R$  и  $\varrho$  равно

$$\bar{p} = HM = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{\pi} \sqrt[5]{\frac{15}{32} \frac{A_e}{(\theta_1 + \theta_2)^4} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho} \right)^2}, \quad (210)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — коэффициенты упругости обоих материалов, вычисляемые по модулю упругости и коэффициенту Пуассона с помощью формулы

$$\theta = 4 \frac{v^2 - 1}{v^2 E}; \quad (211)$$

$A_e$  — работа упругих сил.

Будем сохранять диаметр шарика и высоту падения постоянными. Тогда высота отскакивания  $h_2$ , пропорциональная потенциальной энергии упругого деформирования при ударе, окажется функцией твердости образца и коэффициентов упругости материалов шарика и образца

$$h_2 = f[HM, (\theta_1 + \theta_2)], \quad (212)$$

или, при постоянстве упругих свойств применяемых шариков,

$$h_2 = f(HM, \theta_1).$$

Высота отскакивания является функцией статической твердости и модуля упругости испытываемого материала.

## 28. ТЕОРИЯ ТЭЙБОРА (1948 г.)

Теория Тэйбора изложена в отдельной статье [95] и в главе 8 его книги «Твердость металлов» [97]. Ее можно в настоящее время считать наиболее развитой теорией динамических методов измерения твердости.

### Этапы удара

Процесс удара наконечника о поверхность испытываемого тела можно подразделить на четыре этапа.

1. Вначале поверхность контакта деформируется упруго и, если кинетическая энергия наконечника была мала, он может быть отброшен упру-

гими силами, не оставляя отпечатка. В этом случае удар будет чисто упругим и продолжительность удара, среднее давление и величина деформации определяются по формулам Герца.

2. Второй этап наступает, когда среднее давление на отпечатке превысит некоторую характерную величину, которую можно назвать динамическим пределом текучести при соударении. В этом случае начнется пластическая деформация испытуемого тела, и удар не будет уже упругим. Вычисления показывают, что пластические деформации начинаются при очень малых энергиях удара.

3. При увеличении энергии удара очень скоро наступает состояние «полной» пластичности — 3-й этап — и пластическая деформация продолжается до тех пор, пока не будет поглощена вся кинетическая энергия наконечника.

4. Наконец, происходит ликвидация упругих напряжений в наконечнике и материале, в результате чего наконечник отскакивает и отпечаток восстанавливается — 4-й этап.

### Основные допущения теории

Мы допускаем, что как только в процессе удара среднее давление достигает величины  $Z$  — динамического предела текучести при соударении — начинается пластическое течение, во время которого среднее давление остается постоянным, равным  $Z$ .

Далее мы предполагаем, что упругие волны в образце и наконечнике поглощают малую часть энергии удара и что изменением упругих свойств при ничтожном изменении температуры соударяющихся тел можно пренебречь.

### Вычисление работы образования отпечатка

Работа пластического деформирования  $W_3$  есть разность между кинетической энергией наконечника до удара  $W_1$  и кинетической энергией наконечника после удара  $W_2$ .

$$W_3 = W_1 - W_2. \quad (213)$$

Пусть наконечник будет шариком с радиусом  $R$  и массой  $m$ , который падает на горизонтальную плоскую поверхность металла с высоты  $h_1$  и затем отскакивает на высоту  $h_2$  (рис. 40), оставляя на поверхности отпечаток диаметром  $d = 2r$  (хорда сегмента). Предположим, что энергия, освобождающаяся при ликвидации упругих напряжений в наконечнике и материале на 4-м этапе удара, равна кинетической энергии наконечника после удара. Кроме того, будем предполагать, что модули Юнга для наконечника и металла при ударе имеют те же числовые значения, что и при статических испытаниях.

Рассмотрим отпечаток после удара. Поскольку на 4-м этапе удара происходит упругое восстановление отпечатка, радиус его кривизны  $\rho$  будет несколько больше радиуса наконечника. Если (на короткое время) приложить статически к наконечнику подходящую нагрузку  $F$ , можно упруго деформировать отпечаток и наконечник так, чтобы они вновь соприкасались вплоть до краев отпечатка. Величину силы  $F$  можно найти



Рис. 40. Схема образования ударного отпечатка.

по формуле Герца для диаметра площадки касания при вдавливании шара радиусом  $R$  в сферическую лунку с радиусом кривизны  $q$

$$d = 2r = \left[ \frac{6FRq}{q-R} f(E) \right]^{1/2}, \quad (214)$$

где  $f(E) = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$ ;

$E_1, E_2$  — модули упругости наконечника и металла;

$\nu_1, \nu_2$  — коэффициенты Пуассона.

Мы найдем упругую энергию, запасаемую при ударе, если вычислим внешнюю работу, необходимую для вдавливания наконечника в отпечаток. По мере нагружения наконечника сила вдавливания увеличивается и достигает своего максимального значения, определяемого формулой (214), в момент, когда касание будет происходить на всей поверхности отпечатка. В промежуточный момент времени, когда поверхность касания ограничена окружностью радиуса  $a$  ( $a < r$ ), сила вдавливания по формуле (214) будет равна

$$\mathfrak{F} = \frac{Fa^2}{r^2}. \quad (215)$$

В этот момент времени в результате упругих деформаций наконечника и металла центр наконечника опустится на расстояние

$$l = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{F}^2}{a} f(E), \quad (216)$$

где  $f(E)$  имеет прежнее значение.

Полную упругую энергию, запасенную деформированными поверхностями наконечника и материала, можно найти интегрированием с учетом формул (214) и (216)

$$\int \mathfrak{F} dl = \int_0^r \frac{3}{2} \frac{F^2}{r^4} f(E) a^4 da = \frac{3}{10} \frac{F^2}{r} f(E). \quad (217)$$

Рассматриваемый процесс вдавливания является обращением процесса упругого восстановления отпечатка, когда наконечник выталкивается из отпечатка. Поскольку процессы являются упругими, энергии в обоих случаях взаимно равны и равны кинетической энергии отскакивающего наконечника

$$W_2 = mgh_2 = \frac{3}{10} \frac{F^2}{r} f(E). \quad (218)$$

Значение кинетической энергии наконечника до удара нам известно,  $W_1 = mgh_1$ , и поэтому из формулы (218) находим работу образования отпечатка

$$W_3 = mg(h_1 - h_2). \quad (219)$$

Если далее в какой-то момент времени при пластической деформации проекция поверхности отпечатка имела площадь  $S$ , то сила, действующая на наконечник, будет равна  $ZS$ , где  $Z$  — среднее давление, которое во время пластической деформации по предположению остается постоянным. Полная работа, затрачиваемая для образования отпечатка, выразится интегралом

$$W_3 = \int ZS dx = Z \int S dx = ZV_r, \quad (220)$$

где  $dx$  — перемещение при пластическом деформировании;

$V_r \approx \pi r^2/4q$  — объем восстановленного отпечатка.

Формула (214) позволяет установить следующее соотношение

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{3}{4} \frac{F}{r^3} f(E).$$

Если учесть это соотношение при вычислении объема восстановленного отпечатка, то формула (220) дает

$$W_3 = Z \frac{\pi r^4}{4R} - \frac{3}{16} \frac{F^2}{r} f(E), \quad (221)$$

потому что сила  $F$  в конце вдавливания равна  $Z\pi r^2$ .

Первый член в формуле (221) есть просто  $ZV_a$ , где  $V_a$  — кажущийся объем отпечатка, т. е. объем, который имел бы отпечаток, если бы он имел тот же радиус кривизны, как и наконечник. Второй член, как показывает сравнение с формулой (218), равен  $5W_2/8$ . Поэтому

$$W_3 = ZV_a - \frac{5}{8} mgh_2. \quad (222)$$

#### Динамическая твердость

Приравняв выражения (219) и (222) для работы образования отпечатка, можно найти динамический предел текучести при ударе

$$Z = \frac{gm \left( h_1 - \frac{3}{8} h_2 \right)}{V_a}. \quad (223)$$

Эта формула показывает, что для тел, у которых высота отскакивания мала, можно ожидать приближенного постоянства двух отношений:  $mgh_1/V_a$  и  $mg(h_1 - h_2)/V_a$ . Первое отношение как мера динамической твердости было предложено в 1895 г. Мартелем [82], который установил своими опытами, что условный объем отпечатка является прямо пропорциональным кинетической энергии наконечника перед ударом. Второе отношение предлагал ряд позднейших авторов, которые считали необходимым учесть энергию удара. Путаница вызывалась смещением объема невосстановленного отпечатка  $V_a$ , образующегося в конце 3-го этапа удара, с объемом  $V_r$  восстановленного отпечатка, остающегося на поверхности после удара.

При выводе формулы (223) было сделано предположение, что величина  $Z$  остается постоянной в течение всего процесса удара. По двум причинам можно ожидать, что это строго не выполняется. Во-первых, можно ожидать снижения величины  $Z$  в начальных стадиях удара при больших скоростях деформирования. Количественная оценка эффекта в настоящее время почти невозможна. Во-вторых, упрочнение деформированного металла при вдавливании повышает величину  $Z$ , подобно тому как это происходит при статических измерениях твердости. Для оценки порядка этого повышения будем предполагать, что среднее давление на отпечатке в конце процесса деформирования выражается степенной функцией  $p = kd^{n-2}$ , вытекающей из закона Мейера. Тогда работа, затраченная на пластическое смещение объема  $V_r$ , будет равна

$$W_3 = \frac{4}{n+2} pV_r \quad (224)$$

[ср. формулы (201), (205), (206)].

Если заменить этим выражением формулу (220), то, повторяя прежние рассуждения с заменой  $Z$  на  $p$ , найдем следующее значение среднего давления в конце процесса деформирования:

$$p = \frac{n+2}{4} \cdot \frac{mg \left( h_1 - \frac{2n-1}{2(n+2)} h_2 \right)}{V_a}. \quad (225)$$

При изменении показателя степени от 2 до 2,5 величина первой дроби в формуле (225) изменяется от 1 до 1,12, а второй член внутри круглой скобки в числителе второй дроби изменяется от  $3h_2/8$  до  $4h_2/9$ . В конечном итоге значение среднего давления по формуле (225) получается несколько выше того значения динамического предела текучести при ударе, постоянство которого постулировалось при построении теории. Разность, однако, никогда не превосходит 10%.

### Высота отскакивания и условный объем отпечатка

Вспомня, что в конце процесса деформирования  $F = \pi r^2 Z$ , можно переписать формулу (218) так:

$$h_2 = \frac{3}{10} \frac{\pi^2 r^3 Z^2}{mg} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right), \quad (218a)$$

или, если считать  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,

$$h_2 = \frac{2,7Z^2}{mg} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) r^3. \quad (218b)$$

Поскольку объем невосстановленного отпечатка  $V_a$  пропорционален  $r^4$ , формулы (218a и б) позволяют заключить, что высота отскакива-

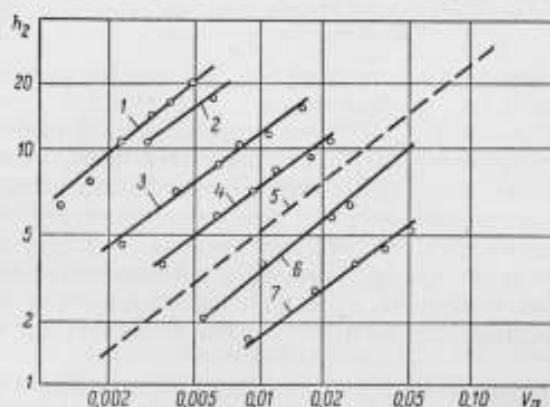


Рис. 41. Высота отскакивания и объем отпечатка.

1 — сталь Ni — Cr; 2 — мягкая сталь; 3 — никель; 4 — латунь; 5 — прямая с угловым коэффициентом 3/4; 6 — медь; 7 — алюминий.

ния пропорциональна  $V_a^{3/4}$  для любого заданного материала. Нанося  $h_2$  на логарифмический график как функцию  $V_a$ , мы должны получить прямые линии с угловым коэффициентом 3/4, если величина  $Z$  является постоянной. Если она непостоянна, но изменяется в соответствии с формулой (226), то логарифмические графики должны оставаться прямыми, но с угловым коэффициентом, равным  $(3 + 2n - 4) : 4$ . При изменении  $n$  от 2 до 2,5 угловой коэффициент изменяется от 0,75 до 1. Результаты опытов Эдвардса и Остина [69] показывают, что в первом приближении рассматриваемое следствие теории выполняется (рис. 41). Точки для каждого отдельного материала располагаются на прямых, угловые коэффициенты которых лежат в узких пределах от 0,7 до 0,85.

### Высота отскакивания при заданных размерах отпечатка

Для отпечатков заданного диаметра высота отскакивания должна быть пропорциональна  $Z^2 (E_1^{-1} + E_2^{-1})$ . Нанося  $h_2$  в логарифмических координ-

натах как функцию  $Z\sqrt{E_1^{-1} + E_2^{-1}}$ , мы должны получить снова прямые, на этот раз с угловым коэффициентом 1/2. На рис. 42 изображены вновь

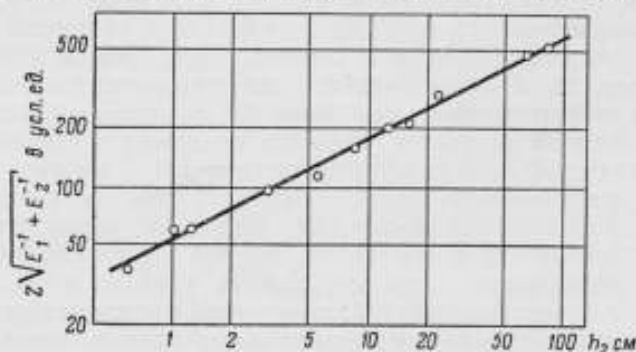


Рис. 42. Результаты измерений Эдвардса и Остина.

результаты измерений Эдвардса и Остина. Согласие теории с опытом снова хорошее — угловой коэффициент прямой равен 0,51 вместо теоретического значения 0,50. Размеры отпечатков не сказываются на рассматриваемой зависимости.

#### Динамический предел текучести при ударе

Подставим в формулу (223) значение  $V_a = \pi r^4/4R$ , а затем исключим  $r$  из формул (218) и (223), тогда получим следующее выражение для динамического предела текучести при ударе:

$$Z^5 = \frac{h_2^4}{\left(h_1 - \frac{3}{8} h_2\right)^3} \cdot \frac{mg}{R^3} \cdot \frac{10^4}{\pi^3 \cdot 4^3 \cdot 3^3} \left(\frac{1}{f(E)}\right)^4.$$

Если мы примем  $v_1 = v_2 = 0,3$ , то эта формула получит вид:

$$Z^5 = \frac{h_2^4}{\left(h_1 - \frac{3}{8} h_2\right)^3} \cdot \frac{mg}{109R^3} \cdot \frac{1}{(E_1^{-1} + E_2^{-1})^4}. \quad (226)$$

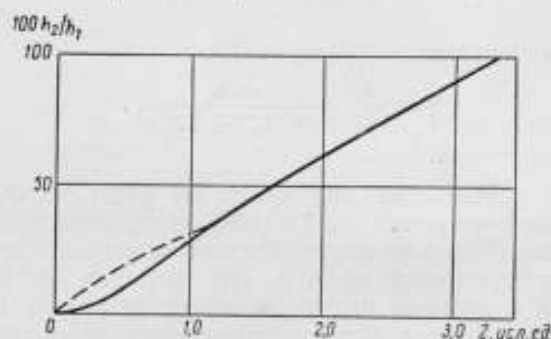


Рис. 43. Отношение высоты отскакивания к высоте падения.

Штриховая линия — начальный участок кривой у мягких металлов.

Поскольку величина  $(E_1^{-1} + E_2^{-1})^4$  в формуле (226) мало изменяется при переходе от одного металла к другому, последнюю дробь можно

считать постоянным множителем. Нанося на график теоретическую зависимость  $Z$  от высоты отскакивания  $h_2$  при фиксированной высоте падения, получим кривую, изображенную на рис. 43. Если учитывать, что мягкие металлы обычно имеют меньшие модули упругости, то начало кривой изобразится на рисунке штриховой линией. При выводе формулы (226) предполагалось, что  $Z$  — постоянное. Если потребовалось бы учесть возрастание  $Z$  из-за упрочнения, надо было бы исходить из формул (218а) и (224), но конечный результат, если его представить графически, будет незначительно отличаться от кривой, изображенной на рис. 43.

Значение динамического предела текучести при ударе на самом деле зависит от диаметра образующегося отпечатка вследствие перехода от начала пластичности к состоянию полной пластичности. В опытах Дэвиса [67] наблюдалось, что при слабых ударах, когда деформация является почти полностью упругой, величина  $Z$  составляет примерно 1/2,5 долю ее значения, наблюдаемого при сильных ударах, когда происходят значительные пластические деформации. Рисунок 43 пригоден только для малых высот отскакивания и больших отпечатков. Он не пригоден для больших высот отскакивания, когда условия удара приближаются к началу пластичности. В области полной пластичности предел текучести будет в 2—3 раза больше. Если изобразить высоту отскакивания для фиксированной высоты падения в зависимости от предела текучести при полной пластичности, нижняя часть кривой останется прежней, как на рис. 43, но верхняя часть должна сместиться вправо, что придаст кривой типичный S-образный вид, присущий градуировочным кривым склероскопа Шора.

#### Условия упругого удара

Интересно рассмотреть случай, когда высота отскакивания шарика равна высоте падения, т. е. когда удар оказывается целиком упругим и не происходит никакой пластической деформации на образце. По формуле Герца конечное давление  $p$  между наконечником и телом будет тогда равно

$$p_e^5 = \frac{8^3}{5^3} \cdot \frac{10^4}{\pi^5 \cdot 4^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{mgh_1}{R^3} \left( \frac{1}{J(E)} \right)^4, \quad (227)$$

или, полагая, как обычно,  $v_1 = v_2 = 0,3$ ,

$$p_e^5 = \frac{1}{26,6} \frac{mgh_1}{R^3 (E_1^{-1} + E_2^{-1})^4}. \quad (228)$$

Пластических деформаций при ударе не будет, если давление при этом, определяемое формулами (227) и (228), будет ниже предела текучести.

Если в формулу (228) в качестве давления подставить статический предел упругости, увеличенный на 10% [ср. формулу (82)], можно найти ту высоту, падая с которой шарик начинает оставлять на поверхности тела пластический отпечаток. Эти высоты падения 10-мм стального шарика для некоторых материалов приведены в табл. 12.

Как видно из таблицы, даже очень слабые удары могут вызывать появление отпечатков на поверхности. Причина этого явления заключается в том, что при ударе возникают значительные мгновенные силы.

Метод измерения твердости по отскакиванию не позволяет различать материалы, у которых предел текучести будет выше критического давления  $p_e$ , при котором появляется пластический отпечаток. Для расшире-



Таблица 12

Металл	НВ, кгс/мм <sup>2</sup>	Статический предел текучести, кгс/мм <sup>2</sup>	Пластический отпечаток появляется при	
			статической нагрузке, кгс	падении шарика с высоты, см
Те — Рв	6	2,1	0,002	0,5 · 10 <sup>-4</sup>
Мягкая медь	55	20	0,062	3,2 · 10 <sup>-4</sup>
Наклепанная медь	90	31	0,23	2,8 · 10 <sup>-3</sup>
Наклепанная мягкая сталь	190	65	1,2	1,5 · 10 <sup>-2</sup>
Легированная сталь	350	130	9,5	0,5

ния предела применимости метода необходимо добиться повышения величины  $p_e$ . Удвоение  $p_e$  связано, как показывает формула (228), с увеличением массы или высоты падения в 32 раза или с уменьшением радиуса шарика в 3,2 раза.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Понятие «твердость» до сих пор не имеет строгого научного определения. С описательной, чисто формальной точки зрения твердость есть особое свойство, присущее в различной степени реальным твердым телам, которое проявляется в способности этих тел оказывать сопротивление всяким попыткам упруго или пластически деформировать участок поверхности тела или оторвать частицы вещества с этого участка или же одновременно произвести какую-либо комбинацию из этих трех действий.
2. Указанное в п. 1 словесное определение твердости, соответствующее нашим осязательным ощущениям и житейскому словоупотреблению, не позволяет, однако, однозначно выбрать метод количественного измерения твердости. В силу этого обстоятельства в настоящее время не существует общепризнанной единой шкалы твердости. Предложено около сотни принципиально различных приборов, но измеряемые с их помощью величины — «эмпирические твердости» — служат только условными характеристиками испытываемых материалов и часто даже не сопоставимы друг с другом, так как имеют разную размерность. Обширный экспериментальный материал учит, что всякая эмпирическая твердость является величиной, зависящей не только от свойств испытываемого вещества, но и от условий опыта.
3. Для того чтобы связать значения эмпирических твердостей с основными механическими характеристиками испытываемого материала и тем самым приблизиться к научному обоснованию понятия твердости, необходимо было бы разработать удовлетворительную теорию каждого конкретного процесса измерения с учетом всех существенных условий опыта.
4. В современной промышленности для контроля технологических процессов и для испытания готовых изделий наибольшее применение нашли статические методы измерения твердости, основанные на вдавливании в плоскую поверхность испытываемого тела наконечника определенной формы и свойств (стальной шарик по Бринеллю, алмазная пирамида по Виккерсу, притупленный алмазный конус по Роквеллу).
5. Если отвлечься от возможности замены в ближайшее время статических методов какими-либо иными методами измерения твердости, то следует признать необходимым создание удовлетворительной теории вдавливания наконечников различной формы в изотропное твердое тело. До сих пор в современной науке — теории пластичности и реологии — решены только задачи о вдавливании бесконечно длинного плоского штампа и бесконечно длинного клина.
6. Наиболее замечательная попытка научного определения твердости была сделана Генрихом Герцем в 1881 г. Хотя Герцу не удалось полностью

решить поставленную задачу, но анализ его работы дает ясную перспективу дальнейших исследований. Решая в рамках теории упругости задачу соприкосновения двух тел (в частности шарика и плоскости, ограничивающей полупространство), Герц предложил считать твердостью то давление, при котором в центре поверхности соприкосновения будет превзойден предел упругости. Однако твердые тела по Герцу могут сильно различаться по своим свойствам после выхода напряжения за предел упругости, как это имеет место на современных приборах для статического измерения твердости. Твердость должна характеризоваться не одним числом, а целой кривой в зависимости от доли пластической деформации в полной деформации. Герц выбрал точку, в которой эта доля равна нулю. Исчерпывающая же характеристика твердости тела требует указания не одной только точки, а ряда целесообразно выбранных точек на «кривой твердости». Иными словами, твердость характеризуется не одним числом, а целой кривой, параметры которой являются функциями макрореологических констант и условий опыта.

7. В настоящее время в области измерения твердости можно сформулировать три основные задачи:

- а) стандартизация методов измерения эмпирической твердости;
- б) установление связи эмпирической твердости с механическими константами различных веществ;
- в) создание теории поверхностного деформирования тел на основе теории пластичности и реологии.

Решение первой задачи имеет большое практическое значение для промышленности, широко пользующейся измерениями твердости для контроля за качеством продукции.

Решение остальных двух задач раскроет сущность понятия твердости.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беллев Н. М., «Вестник инженеров и техников», № 2, 1917.
2. Вандышев Б. А., Савицкий Ф. С., Рефераты научно-исследовательских работ институтов Комитета, Сб. № 2, реферат № 163, Стандартгиз, 1958.
3. Варнелло В. В., Рефераты научно-исследовательских работ институтов Комитета, Сб. № 1, реферат № 35, ВНИИМ, 1956.
4. Витман Ф. Ф., «Заводская лаборатория», № 2, 1947, стр. 198.
5. Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953.
6. Гликман Л. А., Максимов Н., «Заводская лаборатория», № 11—12, 1945, стр. 1091.
7. Гогоберидзе Д. Б., Твердость и методы ее измерения, Машгиз, 1952.
8. Гогоберидзе Д. Б., «Природа», № 9, 1952, стр. 78.
9. Гольдшмидт В., УФН, № 6, 1929.
10. Давиденков Н. Н., Динамические испытания металла, ОГИЗ, 1929.
11. Давиденков Н. Н., Некоторые проблемы механики материалов, Лениздат, 1943.
12. Давиденков Н. Н., Беллев С. Е., Марковец М. П., «Заводская лаборатория», № 10, 1945, стр. 964.
13. Динник А. М., Удар и сжатие упругих тел, Киев, 1909.
14. Дрозд М. С., «Заводская лаборатория», № 1, 1958, стр. 74.
15. Дрозд М. С., «Заводская лаборатория», № 8, 1958, стр. 1002.
16. Дрозд М. С., «Заводская лаборатория», № 5, 1959, стр. 597.
17. Дрозд М. С., «Заводская лаборатория», № 1, 1960, стр. 90.
18. Дрозд М. С., «Заводская лаборатория», № 4, 1960, стр. 472.
19. Зайцев Г. П., Инженерный сборник АН СССР, № 2, 1941.
20. Зайцев Г. П., Константы пластичности металлов, Докторская диссертация, ВНИИМ, 1949.
21. Зайцев Г. П., Константы пластичности металлов (автореферат докторской диссертации), ВНИИМ, 1949.
22. Зайцев Г. П., ЖТФ, № 3, 1949, стр. 336.
23. Зайцев Г. П., «Заводская лаборатория», № 5, 1950, стр. 600.
24. Зайцев Г. П., Труды Сибирского физико-технического института, вып. 34, 1955, стр. 22.
25. Зайцев Г. П., «Физика металлов и металловедение», № 2, 1956, стр. 339.
26. Зайцев Г. П., Славина Н. П., Труды химико-металлургического института Западносибирского филиала АН СССР, вып. 11, 1958, стр. 131.
27. Зайцев Г. П., Смолич С. А., «Заводская лаборатория», № 11, 1950, стр. 1335.
28. Зинер К., Упругость и неупругость металлов, статья в сб. «Упругость и неупругость металлов», ИЛ, 1954.
29. Ишлинский А. Ю., «Прикладная математика и механика», т. VII, 1943, стр. 117.
30. Ишлинский А. Ю., «Прикладная математика и механика», № 3, 1944, стр. 201.

31. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, Гостехиздат, 1956.
32. Кузнецов В. Д., Физика твердого тела, тт. 1—5, Томск, 1932—1949.
33. Кузнецов В. Д., Поверхностная энергия твердых тел, Гостехиздат, 1954.
34. Лазарев П. П., Известия Российской АН, 1918, стр. 1259, 2241, 2245.
35. Лазарев П. П., Известия Российской АН, 1918, стр. 1925.
36. Мухелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.
37. Мухелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Гостехиздат, 1949.
38. Надаи А., Пластичность, ОНТИ, 1936.
39. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1, ИЛ, 1954.
40. Одинг И. А., Теория дислокаций в металлах и ее применение, Изд. АН СССР, 1959.
41. О'Нейль Г., Твердость металлов и ее измерение, Metallurgizdat, 1940.
42. Пашков П. О., ЖТФ, № 2, 1949.
43. Пашков П. О., Пластичность и разрушение металлов, Судпромгиз, 1950.
44. Пилипчук Б. И., «Заводская лаборатория», № 4, 1960, стр. 60.
45. Пилипчук Б. И., Труды институтов Комитета, 1961, вып. 50 (110), стр. 5.
46. Ребиндер П. А., Доклад на VI съезде физиков в 1928 г.
47. Рейнер М., Десять лекций по теоретической реологии, Гостехиздат, 1947.
48. Ровинский Б. М., Известия АН СССР, отд. техн. наук, № 9, 1956, стр. 55.
49. Семенченко В. К., Поверхностные явления в металлах и сплавах, Гостехиздат, 1957.
50. Соколовский В. В., Теория пластичности, Гостехиздат, 1950.
51. Степанов С. С., Труды ВНИИМ, 1959, вып. 37(97), стр. 106.
52. Тылевич И. Н., Определение механических свойств судостроительных материалов методом вдавливания, Судпромгиз, 1959.
53. Ферман А. Е., Геохимия, т. 3, ОНТИ, 1937.
54. Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1949.
55. Хилл Г., Математическая теория пластичности, Гостехиздат, 1956.
56. Хрущов М. М., Труды совещания по микротвердости 21—23 декабря 1950, Ин-т машиноведения АН СССР, М., 1950.
57. Хрущов М. М., Бабичев М. А., ДАН СССР, т. 88, № 3, 1953.
58. Хрущов М. М., Бабичев М. А., Трение и износ в машинах, Изд. АН СССР, 1956.
59. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
60. Allen H. S., Proc. Roy. Soc., 94, 1917, p. 100.
61. Auerbach F., Ann. d. Phys., B. 43, 1891, S. 89; B. 53, 1894, S. 1002 и 1032; B. 58, 1896, S. 357.
62. Benedicks C., Ann. d. Phys., 1913, S. 42.
63. Bishop R. F., Hill R., Mott N. F., Proc. Phys. Soc. (Lond.), v. 57, 1945, p. 147.
64. Botton S., Chem. News, v. 27, 1873, p. 215.
65. Boussinesque J., Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris, 1885.
66. Campbell H. G., White C. M., Engineering, 1925, p. 797.
67. Davies R. M., Proc. Roy. Soc., v. A 197, 1949, p. 416.
68. Du Toit Meyer M. A., Appl. Sci. Res., v. A3, 1951, No. 1, p. 11.
69. Edwards C. A., Austin C. R., J. Iron. and Steel Inst., v. 107, 1923, p. 324.
70. Förpl A., Mitt. mech. techn. Laboratoriums, München, Heft 25, 1897, S. 37; Heft 28, 1897, S. 42.
71. Goldschmidt W., Z. techn. Phys., B. 8, 1927, S. 150.
72. Goldschmidt W., Naturwissens., B. 20, 1932, S. 338.
73. Hankins G. A., Proc. Instn. Mech. Engrs, v. 1, 1925, p. 611.
74. Hertz H., Journ. für die reine und angew. Math., B. 92, 1881, S. 156.
75. Hertz H., Verhandl. d. Ver. zur Beförderung d. Gewerbefleißes, Berlin, November, 1882.

76. Huber M. T., Ann. d. Phys., B. 14, 1904, S. 153.
77. Kenngott A., Jahrbuch d. K. K. Geolog. Reichsanstalt, 1852.
78. Kirsch B., Ueber die Bestimmung der Härte, Mitt. tech. Gewerbemuseum, Wien, 1891.
79. Kokado, Tohoku Techn. Repts, v. 6, 1927, p. 201.
80. Love A. E. H., Quarterly Journ. of mathematics, Oxford series, v. 10, 1939, No. 39.
81. Ludwick P., Die Kegeldruckprobe, Springer, Berlin, 1908.
82. Martel R., Commission des méthodes d'essai de matériaux de construction Paris, v. 3, 1895, p. 261.
83. Martens A., Heyn E., Z. VDI, B. 52, Nr. 43, 1908, S. 1719.
84. Meyer E., Z. VDI, B. 52, 1908, Nr. 17, S. 645; Nr. 19, S. 740; Nr. 21, S. 835.
85. Moore H., J. Iron Steel Inst., v. 101, 1920, p. 357.
86. O'Neill H., J. Iron Steel Inst., v. 1, 1923, p. 343.
87. Peck R. L., Ingerson W. E., Proc. Am. Soc. Test. Mat., v. 39, 1939, p. 1270.
88. Prager W., Hodge P. G., Theorie ideal plastischer Körper, Springer, Wien, 1954.
89. Pugh G. E., Phil. Mag., v. 45, 1945, p. 823.
90. Rasch Z., Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge, Nr. 19/20, 1899.
91. Reiner M., Deformation, Strain and Flow, H. K. Lewis and Co, Ltd, London, 1960.
92. Schneider J., Z. VDI, B. 54, 1910, S. 1631.
93. Späth W., Physik u. Technik der Härte u. Weiche, Springer, Berlin, 1940.
94. Tabor D., Proc. Roy. Soc., v. A 192, 1948, p. 247.
95. Tabor D., Engng, v. 165, No. 4287, 1948, p. 289.
96. Tabor D., J. Inst. of Metals, v. 79, 1951, p. 1.
97. Tabor D., The hardness of metals, Clarendon Press, Oxford, 1951.
98. Tamman G., Müller W., Z. Metallkunde, B. 28, 1936, S. 49.
99. Waizenegger B., Z. VDI, B. 65, 1921, S. 824.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Принятые обозначения . . . . .	5
Глава I. Общие сведения . . . . .	7
1. Понятие твердости . . . . .	7
2. Твердость с точки зрения физики твердого тела . . . . .	13
3. Основные понятия механики сплошной среды . . . . .	18
Тензор напряжений . . . . .	18
Тензор деформаций . . . . .	20
Реологические модели твердых тел . . . . .	21
Закон подобия . . . . .	23
4. Контактная задача в теории упругости . . . . .	24
Постановка задачи . . . . .	24
Историческая справка . . . . .	25
Решение задачи Герца . . . . .	25
5. Задача вдавливания в теории пластичности . . . . .	27
Общая формулировка критерия пластичности . . . . .	27
Критерий пластичности Губера — Мизеса . . . . .	28
Критерий пластичности Треска — Сен Венана . . . . .	28
Критерий пластичности Хаара — Кармана . . . . .	29
Решение задачи вдавливания штампов . . . . .	29
Глава II. Статические методы измерения твердости . . . . .	32
<i>А. Вдавливание шарика</i>	
6. Твердость по Герцу (1882 г.) . . . . .	32
Теория Г. Герца (1881 г.) . . . . .	32
Опыты Ауэрбаха (1891 г.) . . . . .	33
Критика Губера (1904 г.) . . . . .	35
7. Твердость по Бринеллю (1900 г.) . . . . .	36
8. Теория Мейера (1908 г.) . . . . .	38
Твердость по Мейеру как среднее давление . . . . .	38
Закон Мейера . . . . .	39
Зависимость твердостей по Бринеллю и по Мейеру от усилия и от угла вдавливания . . . . .	40
Кривая твердости . . . . .	42
Критика твердости по Герцу . . . . .	43
Твердость не выражается одним числом . . . . .	44
Сравнение твердостей . . . . .	44
9. Твердость по Мартенсу — Гейну (1908 г.) . . . . .	45
10. Теория Тэйбора (1948 г.) . . . . .	46

Наступление пластической деформации . . . . .	47
Состояние полной пластичности . . . . .	48
Характеристическая кривая «среднее давление — нагрузка» . . . . .	48
Область применимости закона Мейера . . . . .	50
Вывод закона Мейера . . . . .	51
Обратимость восстановления отпечатка . . . . .	52
Твердость по Бринеллю и предел прочности . . . . .	53
Выбор материала для шарика . . . . .	54
Выбор нагрузки для испытания очень твердых материалов . . . . .	55
Предельное число твердости, измеряемое данным шариком . . . . .	56
11. Теория В. В. Варнелло (1949 г.) . . . . .	56
12. Теория Г. П. Зайцева (1949 г.) . . . . .	58
Обоснование закона Мейера . . . . .	59
Закон подобия при вдавливании шарика . . . . .	60
Деформации при вдавливании шарика . . . . .	61
Связь констант пластичности с характеристиками кривой растяжения . . . . .	63
Инварианта пластичности при вдавливании шарика . . . . .	63
Твердость по Бринеллю и предел прочности . . . . .	64
Образование первого пластического отпечатка . . . . .	66
Связь упругих и пластических констант материала . . . . .	67
13. Теория П. О. Пашкова (1950 г.) . . . . .	67
Сила вдавливания . . . . .	67
Сопротивление пластическому течению . . . . .	69
14. Теория М. С. Дрозда (1958 г.) . . . . .	71
Основные величины при вдавливании шарика . . . . .	71
Диаграммы вдавливания . . . . .	71
Физическое подобие отпечатков . . . . .	73
Новое число твердости по М. С. Дрозду . . . . .	74
Критические замечания . . . . .	75
<i>Б. Вдавливание шарика с предварительной нагрузкой</i>	
15. Теория Дю Туа Мейера (1951 г.) . . . . .	76
Вычисление разности глубин $h' - h_0$ . . . . .	77
Вычисление упругого восстановления . . . . .	77
Твердость по шкале В Роквелла . . . . .	79
Эмпирическая формула Пека — Ингерсона (1939 г.) . . . . .	79
Критические замечания . . . . .	80
16. Теория Тэйбора (1948 г.) . . . . .	80
17. Формула В. В. Варнелло (1949 г.) . . . . .	81
<i>В. Вдавливание конуса</i>	
18. Твердость по Лудвику (1907 г.) . . . . .	81
19. Теория Хенкинса (1925 г.) . . . . .	83
20. Теория П. О. Пашкова (1950 г.) . . . . .	84
Измерение деформаций вокруг отпечатка . . . . .	84
Направление пластического течения . . . . .	84
Твердость по Лудвику . . . . .	85
21. Теория Г. П. Зайцева (1950 г.) . . . . .	85
Закон вдавливания конуса . . . . .	85
Метод двух конусов . . . . .	86
<i>Г. Вдавливание конуса с предварительной нагрузкой</i>	
22. Теория Тэйбора (1950 г.) . . . . .	87
23. Теория Г. П. Зайцева (1951 г.) . . . . .	88
<i>Д. Вдавливание пирамиды</i>	
24. Теория Тэйбора (1950 г.) . . . . .	89
25. Теория Г. П. Зайцева (1951 г.) . . . . .	89



Глава III. Динамические методы измерения твердости . . . . .	91
26. Эмпирические закономерности при ударе шарика . . . . .	91
27. Обзор Н. Н. Давиденкова (1929 г.) . . . . .	92
Предпосылки теории метода отпечатка . . . . .	92
Работа вдавливания шарика . . . . .	92
Удельная работа вдавливания . . . . .	93
Удельная работа и твердость по Мейеру . . . . .	94
Удельная работа и твердость по Бринеллю . . . . .	94
Метод отскакивания . . . . .	95
28. Теория Тэйбора (1948 г.) . . . . .	96
Этапы удара . . . . .	96
Основные допущения теории . . . . .	97
Вычисление работы образования отпечатка . . . . .	97
Динамическая твердость, . . . . .	99
Высота отскакивания и условный объем отпечатка . . . . .	100
Высота отскакивания при заданных размерах отпечатка . . . . .	100
Динамический предел текучести при ударе . . . . .	101
Условия упругого удара . . . . .	102
Заключение . . . . .	104
Литература . . . . .	106

Поступила в редакцию  
21/II 1961 г.

Редактор издательства *Н. Н. Александрова*

Технический редактор *Р. Г. Полянская*

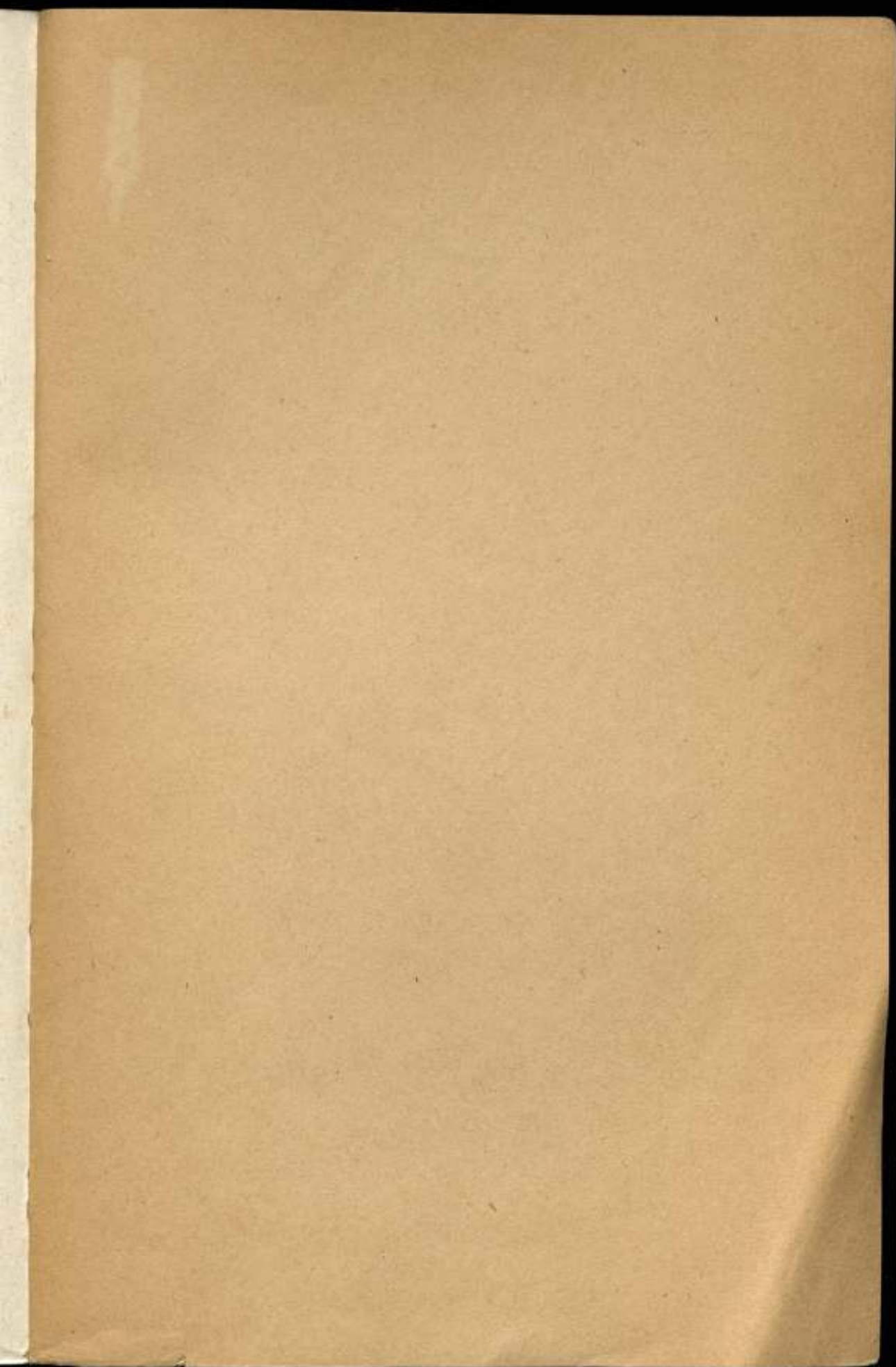
Корректор *Л. Н. Кири*

---

Подписано к печати 3/1 1962 г. Уч.-изд. л. 9,6. Формат бумаги 70×106<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Печ. л. 7. М-04003. Тираж 3000 экз. Заказ 697.

---

Типография № 6 УПП Лесовнархоза, Ленинград ул. Моисеенко, 10



Цена 67 коп.